



TITLE:

# カオス結合多体系における協同現象(修士論文(1995年度))

AUTHOR(S):

柴田, 達夫

---

CITATION:

柴田, 達夫. カオス結合多体系における協同現象(修士論文(1995年度)).  
物性研究 1996, 66(6): 1064-1136

ISSUE DATE:

1996-09-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/95929>

RIGHT:

---

**修士論文** (1995年度)

---

# カオス結合多体系における協同現象\*

柴田 達夫†

東京大学大学院 総合文化研究科広域科学専攻

## 目次

<b>1 はじめに</b>	<b>1065</b>
1.1 要素と現象	1065
1.2 協同現象論の系譜	1066
1.2.1 “散逸構造論”と“Synergetics”	1067
1.2.2 システム論としての動的非平衡論	1068
1.2.3 カオスと協同現象	1069
1.2.4 大域結合カオス系	1070
1.3 本論文の構成	1072
<b>2 大域結合カオス系における協同現象</b>	<b>1073</b>
2.1 はじめに	1073
2.2 隠れたコヒーレンス: 要素の性質が一樣である場合	1075
2.3 非一樣な要素の大域結合系: 一例から	1077
2.4 多様な平均場構造	1083
2.5 協同現象と統計量	1086
2.5.1 通常のリャプノフ・スペクトル	1088
2.5.2 平均場のリャプノフ数	1090
2.6 分布関数のダイナミクス	1092
2.7 平均場における準周期運動の機構: 簡単なケースについて	1093
2.7.1 要素の分岐の組織化	1093
2.7.2 平均場が周期3の運動, 1つのクラスターとばらけたの状態の共存	1095
2.7.3 平均場が周期3の運動, 2つのクラスターとばらけたの状態の共存	1096
2.7.4 平均場が準周期運動, 2つのクラスターとばらけたの状態の共存:	1097
2.7.5 クラスター化運動の生成崩壊機構	1099
2.8 まとめ	1104
2.8.1 まとめ	1104
2.8.2 課題	1105
<b>3 運動カオス多体系における協同現象</b>	<b>1107</b>

---

\*本論文は1996年1月 東京大学大学院総合文化研究科に修士論文として提出したものである。

†E-Mail: shibata@complex.c.u-tokyo.ac.jp 〒153 東京都目黒区駒場3-8-1 東京大学教養学部基礎科学第一 金子研究室

3.1	序	1107
3.2	モデル	1108
3.3	現象	1112
3.4	相図 (Global Phase Diagram)	1114
3.4.1	3つの統計量	1116
3.4.2	相図 (Global Phase Diagram)	1117
3.5	空間における動的クラスター形成	1120
3.5.1	クラスターの生成, 融合と分裂の機構	1120
3.5.2	クラスターの融合と分裂が無い場合	1122
3.6	構造形成	1123
3.6.1	構造形成の機構	1123
3.6.2	間欠的な拡散	1125
3.7	まとめと議論	1129
3.7.1	階層構造の出現	1130
3.7.2	今後の課題	1131
4	議論, 展望	1132
	謝辞	1134
	参考文献	1135

# 1. はじめに

## 1.1 要素と現象

本論文は, カオティックに振動する振動要素が多数集まって相互に影響を及ぼしながら集団を形成しているときに見られる諸現象に関する研究報告である.

我々は自然で起こっている現象を, 様々な要素の集団によって構成されている, と見る事が出来る.

例えば, 生体系は細胞という部分系の集合体である. その細胞は様々な代謝系回路を要素とする多体系として見る事が出来るかも知れない. 生体系での代謝反応は様々なタンパク質が関係しているがタンパク質は 20 種の性質の違うアミノ酸による多体系としてみる事が出来る. 再び細胞に戻って, 今度は視点を大きくしていくと, 細胞の集合は様々な機関を構成する. その中でも脳は多くの人にとって特別に興味のある対象かも知れない.

物理学的な系に目を移してみよう。電器回路は分かり易い例であろう。回路の中には多くの振動的な部分回路によりなることがある。そうした回路によって作られる機器の中で、我々の生活にとって最も重要なものの一つはコンピュータであろう。今や多くのコンピュータは単独では存在していない。それぞれは他のコンピュータといろいろな形で接続されていて、全体として大きなネットワークを形成している。

これらは様々な興味深い現象を我々に見せてくれる。そして、それらの多くは部分系を眺めただけでは決して分からない、部分系の時空スケールをはるかに越えたマクロ現象である。再び生体系を例に挙げれば、生体系は細胞という部分系の集合体であるが、単に集合体なのではなく各々の細胞が他の細胞と関連性を持ち、機能的な秩序を作り出すことで生体としての全体性を構成している。これは、結晶性物質に見られるようなある形の微視的構造が空間的に繰り返すことによって巨視的構造が形成される現象とは対照的である。系の微視的な部分部分を結び付ける相互作用がばらばらに働かず、それらが時空的に足並みをそろえて働くマクロ現象を“協同現象 (co-operative phenomena)”と呼ぶ。そういった協同現象に接近するために、我々はどのような方法論を持っているのであろうか。

上に挙げた対象にアプローチする1つの方法はリアリスティックなモデルをそれぞれの対象について構築する事である。一方、対象は違っていてもそこに共通する見方が成り立つ場合がある。そのような場合に我々は共通の視点を獲得するための装置として抽象的なモデルを立てる。本論文では上に挙げた諸対象に抽象的なレベルで接近する為に、以下の2つのアプローチをとる。

第一に、カオティックな振動要素が多数あって、各要素が系を構成する他の全ての要素と相互作用をする集団系について考察する。これはこれまで大域結合カオス系 (Globally Coupled Chaotic Systems) と呼ばれてきた。ところで、多くの要素によって構成されている様々な現象では、要素間の関係性が動的に変化する。また直接に影響の及ぶ範囲 (要素) が動的に変化することがある。そこで、第二に、カオティックな振動要素が多数あって、各要素は系を構成する他の要素のうちどれと相互作用をするかは時間に応じて変化していくシステムを考察する。

本章では以降に展開される上の2つの内容の背景を明らかにするために、これまでの物理学における協同現象への接近の試みを見取図的に振り返る。そして、最後に再び我々のアプローチに戻り、問題意識を整理したい。

## 1.2 協同現象論の系譜

個々の科学者による営みは別にして、協同現象を統一的な視点で捉えようという大きな流れは1970年代前半より起こる。その流れは物理学の中では2つあり、一つはBrüssels学派による“散逸構造論”，もう一つはHakenらによる“Synergetics”を挙げることが出来る。まず始めにこの2つについて振り返り、協同現象に対する視点を整理しておきたい。

### 1.2.1 “散逸構造論”と“Synergetics”

“散逸構造論”は Prigogine ら Brüssels 学派により提唱された考え方である [1, 2].

平衡熱力学において最大の問題となるのは熱力学第 2 法則である. その第 2 法則から見えてくる自然は“熱的な死”の状態で, その時現われるマクロ構造は, 例えば結晶構造や磁性スピン系で見られる強磁性といった秩序状態である. 一方で生体系では時空的に連関性のとれた機能的な秩序構造が認められる. このような構造を如何に理解していったらよいか. Brüssels 学派の提案は, それらを“散逸構造”の形成として捉えようというものであった.

彼らは熱的平衡状態により形成維持される“平衡構造”に対して, 非平衡条件の下で, エネルギーと物質とを外界と交換しながら形成され維持される構造を“散逸構造”と呼んだ. そして, 散逸構造論の目標は“相互に作用し合う多数のサブユニットからなる非平衡開放系における自己秩序化の統一的表现を与える事”にあった. 従って“散逸構造論”では非平衡熱力学の展開が重要となる.

そこでまず, 平衡での熱力学, および平衡に近いが非平衡で考えられる非平衡線形熱力学での結果を, 如何にして平衡から更に遠く離れた場合へ拡張できるかを問題にした. そこで展開されたのは非平衡非線形熱力学である. エントロピーだけに議論を限るならば, 十分に大きな負のエントロピー流を与えれば系は非平衡非線形熱力学の状況の下で秩序構造を生成し, 維持し得ると言える.

一方, 平衡から遠く離れた系における散逸構造の具体例として彼らは化学反応の巨視的現象論モデルを研究した. それは反応拡散方程式の分岐構造に関するもので, 決定論的な手法である. システムは分岐を経てサブユニットのスケールをはるかに超えたマクロなスケールの構造を作る. この過程は自己秩序化であり, 協同現象であると言う事ができる.

更に彼らは熱力学での議論と反応拡散方程式による散逸構造の発生に関する議論をつなぐために揺らぎの役割に注目した. 非平衡下でシステムは巨視的な反応拡散方程式の可能な安定分岐の 1 つを選択する. しかし, 巨視的方程式自身には, どの分岐を選ぶべきかを決定する特定の要請は何もない. 従ってゆらぎが分岐点近傍において特に重要な役割を演じるものと考えねばならない. つまり, 分岐の選択に関しては確率論的要因を考慮しなければならず, ゆらぎまで含んだ精密な記述が必要となる. そして, 彼らは散逸構造を境界条件によって規定されるエネルギーと物質の流れによって安定化された巨大なゆらぎと考えた.

このように“散逸構造論”では常に非平衡下における熱力学を念頭におきながら議論が展開される. そして, 物理系, 化学系から生物系にわたって熱力学的な議論がどこまで敷衍できるかを問題にした.

“散逸構造論”で展開された非平衡開放系の考え方では, マクロな構造が外部とエネルギーや物質を交換する事で生成, 維持されることが強調されたが, このことは他の分野に対しても多くの影響を与えたように思われる. 経済学や環境科学をはじめとして, もう一つの自然観として思想への影響も伺える. また, 生命科学では, 生命の誕生が問題とされてきた. 平衡系の統計熱力学の見方からは, 極めて稀な偶然性の積み重ねが生命を生み出したと結論せざるを得ない. 一方, 散逸構造論の視点は系を常に環境との相互作用の中で捉え, 物質やエネルギーの流れの中で決定論的にマクロ構造が

生み出されるということにある。“散逸構造論”は生命の誕生や進化の問題に決定論的な立場からアプローチし得ることを示唆していると言える。

一方，“synergetics”では巨視的なスケールの構造や機能に関係している部分系の協同作用を，“隷属原理 (slaving principle)”を強力な作業仮説にないしは方法論として展開している。

Haken らが問題にしたのは、混沌とした状態から秩序化された空間的、時間的あるいは空間－時間的構造が発生する自己秩序化現象 (self-Organization) を統一的に捉える視点、ないし方法論の開発であった。その時に使われたのが“隷属原理 (slaving principle)”に基づく断熱消去である。“synergetics”の視点を Haken による指導的著作から引用してみよう [3]。彼は巨視的な時空パタンの発生機構 (協同現象の発生機構) に関して次のように言っている。“不安定点近くで安定と不安定な集団運動 (モード) を区別できる。安定なモードは不安定なモードに隷属し、消し去ることが出来る。一般にこれによって非常に多数の自由度が減少させられる。その時残った不安定モードが系の巨視的振る舞いをさめる秩序パラメータの役割をする。この秩序パラメータに対して得られる方程式が秩序パラメータの動力学を記述する少数個の普遍類 (universality class) にまとめられる。これらの方程式のあるものは熱平衡にある物理系の 1 次および 2 次の相転移を支配する方程式を強く想起させる。しかし、新しい種類の類も生じる。たとえば脈動 (pulsation) あるいは振動がある。確率的な“力”と決定論的な“力”(すなわち“偶然と必然”)の間の相互作用によって系はその古い状態から新しい配置へと駆動され、また新しい状態のどれが実現されるかが決定される。”

ここでは、平衡から非平衡へという“散逸構造論”におけるこだわりはなく、むしろその間に見られる類似性に注目しながら、そこから取り出される数理的な構造に関心が向かっている。そして、物理学、化学および生物学的な対象はその垣根を取り除かれ単に数理的な題材の提供者に過ぎなくなっている。更に、対象は何もそれらに限ることはない。従って，“synergetics”はシステム論の流れに自然につながってゆく。実際、Haken は“synergetics”が動的なシステム論と統計物理学の橋渡しをしていると自認している。

かつて、ポアソンが物理学思想を「物理学的力学」(méchanique physique)と「解析的力学」(méchanique analytique)の二つの傾向に分類した。前者はラプラスらの態度に通じ、ニュートンの原理によって精密な宇宙像を描こうとしたのに対し、後者はフーリエらの態度に通じ、物理的な原因を論ずるよりも、物理現象の解析的定式化にアクセントがおかれている。フーリエにとっては自然は数学的な題材を提供してくれる対象に過ぎなかったようである [4]。“散逸構造論”と“synergetics”の違いはこの二つに通じるように思われる。1970 年代に始まるこれらの流れの理解はやがて歴史家が明らかにしてくれることだろう。

### 1.2.2 システム論としての動的非平衡論

生命科学から、社会学、認知科学、精神医学まで、広い領域に共通の“論理”を見出そうとすれば、それはシステム論になる。上で述べた“散逸構造論”や“synergetics”は、システム論の第一世代である動的平衡論と対比することで、第二世代システムとして、特徴をよりの確に捉えることが出来る

と思われる (以下システム論に関する記述は [5] に依る)。

第一世代システムの動的平衡論 (ベルタランフィらによる一般システム論等) に対して, “散逸構造論” や “synergetics” を第二世代システムの動的非平衡論として捉えたと, 第一世代システムの特徴が環境との相互作用にもかかわらず自己維持するというホメオステシスであったのに対して, 第二世代システムの特徴はシステムは開放系として環境と物質代謝, エネルギー交換を行ないながら自己組織化していく機構を持つ系であると言えることが出来る。

また, 第一世代では定常維持の機構と共に, 平衡状態に達した後の階層の間の関係 (階層関係論) が問題とされた。それに対して, 第二世代では無秩序から秩序への自己組織化過程が問題となるから, 階層構造は其中で形成されるプロセスとして捉えられる。それぞれの主眼は, 第一世代では動的平衡の結果である「関係」に置かれたが, 第二世代では「生成」に置かれている。

例えば胚の発生過程を考えよう。分子生物学の立場に立てば発生は遺伝コードの時間空間的発現として考えることが出来る。一方, 第二世代システム論が焦点とするのは一つは遺伝システムやコードそのものの形成であり, その過程を発生過程の中で捉えることである。もう一つは, 胚 (システム) は発生過程を通じて各生成段階でそのつど系固有の“プログラム”を形成する。そのプログラムの形成過程を捉えることである。後者では複雑化, 反復, 個別化といったことが問題となってくる。

### 1.2.3 カオスと協同現象

ところで, 以後の章に大いに関係のあるカオスについて触れておきたい。カオスが上の二つの流れの中にあるのかは議論があるだろう。少なくともカオスの研究の初期においては協同現象の研究とは無関係のように見える。ただし, “synergetics” から見れば, カオスのモデル方程式は断熱消去により導出された, と見る事が出来るかも知れない。例えば Lorentz 方程式の導出におけるように。また, カオスの典型として有名な Logistic Map,

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

を考えよう。ここで,  $n$  は離散時間で  $x_{n+1}$  での値が  $x_n$  の写像 (Map) として決まる。モデルの形は簡単ではあるが, カオスを生み出すための必要な引き延ばしと折り畳みの機構を簡単に含んでいる。類似の機構は定性的なレベルで多くの自然現象に見出されている。これも多くの自由度を消去した後に見られるモデルであると言える。

カオスは小数自由度の決定論的な方程式から時間的不規則性が生み出されることを明らかにしたことで大きなインパクトがあった。物理学が“カオス”の概念を獲得したことに対する意義はいろいろと論じられてきたが, ここでは予測不可能性が決定論的な方程式から現われることを挙げるにとどめたい。カオスからのランダムネスへのアプローチは, 言うならば, 方法論的決定論とも呼べるもので, 決定論を突き詰めていった時, そこにあったのは否定し難い予測の不可能性 (事実上の決定不能性) であり, それ故にインパクトも大きかったのであろう。しかし, これを持って確率 (ランダムネス) の起源を明らかにした, と結論付けることは早計である。現代科学における決定論と非決定論, そしてカオスの関係は今後の検討を要するであろう。

カオス研究は当初、低自由度系においてカオスへ至る分岐の構造の研究に主眼が置かれた。その後の展開はいくつかに分かれるように思われる。物理学からのアプローチとしては、カオスの統計的な構造を問題にする統計力学的な態度から [6], カオスの生み出す時系列の記号的多様性に注目して、統計的には見落とされてしまう問題への足掛かりとする態度まで様々である [7, 8, 9].

カオスと協同現象との明確な接点は金子によるカオス写像結合系によって始められた [10]. カオス写像結合系とは例えば,  $N$  個のカオス振動要素  $(x(i), i = 1, 2, 3, \dots, N)$  を用意して, 離散時刻  $n + 1$  でのそれぞれの要素の状態  $x_{n+1}(i)$  を  $x_n(i)$  の関数として

$$x_{n+1}(i) = f(x_n(i)) + \epsilon \left\{ \frac{f(x_n(i-1)) + f(x_n(i+1))}{2} - f(x_n(i)) \right\} \quad (1.1)$$

で与えられる。  $f(x)$  は  $1 - ax^2$  など。式 (1.1) は、各要素は格子サイト  $i$  にそれぞれ配置され、隣の格子  $i-1, i+1$  の要素と相互作用を持つ系を表現している (式 (1.1) は Coupled Map Lattice (CML) と呼ばれている)。

カオス写像結合系は一方で大自由度系におけるカオスのモデルとして見る事が出来る。ここには低自由度カオスから大自由度カオスへの流れが伺える。しかし協同現象の視点から、写像  $f(x)$  を持つサブユニットの相互作用系として見る方が自然であるように思われる。そして、我々の関心はそこで起こるマクロスケールの協同現象であるという事が出来る。多くのカオス的な要素が関係している現象は多い。カオス写像結合系はそれらの現象に対して定性的な理解を与えてきた。

カオスを示すモデル方程式が隸属原理による断熱消去の結果として導出されると見做し得ることは上で述べた。従って、カオス写像結合系を構成する個々のサブユニットのダイナミクスも同様の視点から見る事が出来る。しかし、カオス写像結合系に対しては隸属原理が成り立ち自由度を減少させ協同現象を取り出す事が出来るかどうかは不明である。つまり、我々はもうひとつ大きいスケールの系を構成した事になる。そこでは隸属原理が成立するかも知れないし、しないかも知れない。隸属原理等の現象を縮約して見る方法論が見落としした重要な側面が議論できるかも知れない。

#### 1.2.4 大域結合カオス系

CML は格子空間に広がった系として、そこでの時空現象に関心があつた。一方、カオス要素が長距離相互作用をするシステムや要素ネットワークの簡単なモデルとして、また、力学系としては自由度の非常に高い系の簡単なものとして、大域結合カオス系: Globally Coupled Map (GCM) がこれまで研究されて来た [11]. GCM では個々の要素はカオスの振動を内部に持つ一方で、要素は他の全ての要素と相互作用をしている。本小節では以後の章に関係が深いこの GCM について、若干詳しく触れる。

モデルは以下のようなになる。

$$x_{n+1}(i) = (1 - \epsilon)f(x_n(i)) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_n(j)), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (1.2)$$

ここで、 $x(i)$  は要素  $i$  の状態を表す変数である。また、パラメータは個々の要素の非線形性を表す  $a$ ,



要素間の結合の強さを表す  $\epsilon$  の 2 つである. 要素の内部動力学としては Logistic Map

$$f(x) = 1 - ax^2, \quad (1.3)$$

を採用する. Logistic Map はカオスのプロトタイプとして最もよく知られている. カオスの発生には引き延ばしと折り畳みのダイナミクスが必要であるが, Logistic Map はその過程を簡単な形で含んでおり, また自然が示すカオスにもしばしば Logistic Map と同様の構造が見出されている.  $a$  は非線形パラメータで  $a$  の変化とともに Logistic Map は多様な分岐構造を示す. また, 各要素は全ての要素と強さ  $\epsilon$  で相互作用をしているが, これは各要素が平均場

$$h_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_n(i))$$

と強さ  $\epsilon$  で相互作用をしている, と見る事も出来る.

モデル (1.2) は, 要素間の振動を同期させる作用と, 同期を壊す作用をもつ. 前者は要素間結合によるもので, 後者はそれぞれの要素の内部動力学におけるカオスによる. 2 つの作用の強弱は前者が結合の強さ  $\epsilon$  で, 後者が非線形パラメータ  $a$  で決まる. このそれぞれの作用の強さに応じてモデル (1.2) は, (i) コヒーレント相 (coherent phase), (ii) 秩序相 (ordered phase), (iii) 部分秩序相 (partially ordered phase), (iv) 乱流相 (turbulent phase), の 4 つの相を持つ. それぞれの相の特徴は以下の通りである.

(i) コヒーレント相 (coherent phase) では, すべての要素が同期して振動をしている. それ故, 系の動力学は一つの Logistic Map と同等である.

(ii) 秩序層 (ordered phase) では, 要素はいくつかのグループに分かれて振動をする. 各グループ内では振動は完全に同期している. 同期グループはクラスターと呼ばれ, その数  $k$  は系の全要素数  $N$  に比べてずっと小さい ( $k \ll N$ ). このようなクラスタリング (clustering) 現象は, 大域結合系に広く見られる [12, 13].

(iii) 部分秩序相 (partially ordered phase) の特徴として以下の 2 つを挙げておく. 一つは階層的クラスタリングとその階層的ダイナミクス, もう一つはカオスの遍歴現象である. この相において, 同期の度合を見るために要素の振動の間に適当に距離を導入し, 適当な粗視化によって同期のグループを分けて行くと, まず, 大きなクラスターに分かれ, 更に各クラスターが幾つかのサブクラスターに分かれる構造が見えて来る. これを階層的なクラスタリングと呼ぶ. この階層化クラスターはその構造を動的に変化させる. それは, ある時点で下の階層のクラスター間で生まれた微小差異がカオスによる増幅機構によってより上の階層のクラスターの不安定化をうながし, 階層的クラスター構造が再構成されることで起こる. Haken による隷属原理では下のレベルは上のレベルに対して断熱的に消去されたが, 部分秩序相では, ある時間, 隷属原理は成り立つように見えるが, 階層クラスター構造の再構成によって隷属が破られる.

一方, クラスターの形成は系の有効自由度を減少させることになるが, 部分秩序相ではクラスター構造の再構成により, 系の有効自由度は時間的に  $N$  程度から 1 か 2 まで大きく変化をする. ほとんど数個のクラスターにまとまっていたかと思うと, ほとんどバラバラの状態になったりする. その

変化は間欠的であり、それはあたかも高自由度の相空間を経由しながら低自由度アトラクターの残骸を次々と移っていくようで、カオスの遍歴と呼ばれている。間欠性という表現がカオスのバーストの発生とその時間間隔を問題にしていたのに対して、カオスの遍歴では系がたくさんある低自由度性アトラクター (の残骸) を次々にカオスのバーストによって移って行くことを問題にしている。

(iv) 乱流相 (turbulent phase) ではすべての要素は同期することなく振動している。一つ一つの要素の振動はカオティックであり、要素間の振動に明らかに分かるような相関は無い。したがって、系としてはシステムサイズ  $N$  と同程度の自由度を持つ充分発達した高自由度カオスの状態である。しかし、要素間には完全には無相関ではなく、“隠れたコヒーレンス”と表現されている構造を持つ。これは、要素集団で大数法則の法則が破れている事実によって示されている。詳しくは2章を参照のこと。

### 1.3 本論文の構成

本論文は明らかにこれらの流れに属する。本論の主要な部分を構成するのは2章、及び3章である。

2章では、カオス振動をする多くの要素が他の全ての要素と相互作用しながら集団を構成している系を扱う。従来の多くの研究と違う点は、各要素の性質 (この場合は各要素の非線形性) にヘテロ性があることである。

各要素の状態変数の平均値として“平均場”という系の全体性を表す量を導入すると、それは系のマクロな構造を表現していると期待できるが、2章では系の要素に一見してわかる相関はない乱流相において、平均場が準周期運動をすることを示す。これは協同現象のうちでも特に集団運動 (collective behavior) と呼ばれている。

そこでは、マクロ現象とそれを構成するミクロ現象の関係が問題となる。集団運動から見ると大自由度性を反映した揺らぎと、一方でシステムサイズの有限性を反映した揺らぎの残存が問題となる。隸属原理や方程式の分岐理論が見落とした重要な側面が議論できることを期待する。

また、散逸構造論や synergetics では混沌から秩序への転移がしばしば問題になったが、2章で示される現象では“混沌”と“秩序”がもはや、どちらがどちらを生成するという関係にはない。“混沌”と“秩序”はある一つの事柄の両側面として完全に共存し、要素は自らのカオス性を失うことなく、全体の示す調和と共存している。

3章で扱うシステムでは、同じように多くのカオス振動要素が系を構成しているが、個々の要素はその結合相手を時間と共に変えてゆく。我々はそれを要素に位置を持たせ空間を移動することで実現している。我々はこのモデルを内部動力学を持つ要素が移動という外部動力学を持ち、それらが他の要素との相互作用の中で決まるという視点で見ると、そこでは、様々な空間的な構造が形成される。ここでもマクロな構造とミクロなレベルの個々の要素運動の関係が問題となる。

これまで格子上にカオス振動子や非線形振動子を配置した集団系や他の全ての要素と関係を持つ集団系がよく調べられてきた。3章で扱うシステムは、その窮屈そうな要素たちを格子や関係の束縛か

ら開放するという気分を持つ。

これまで、空間構造を問題にする時は反応拡散方程式を扱うのが普通であった。しかし昨今、これらには絡めとられない対象が多く認識され、直接個々の要素をモデルの中にデザインするというアプローチがとられている。我々の研究はそれらの流れに対して抽象的なレベルで現象を整理していると思われる。

2章と3章は基本的には独立の内容であるのでそのように読められると思われる。

## 2. 大域結合カオス系における協同現象

### 2.1 はじめに

自然界に見られる多くの現象は、多くの部分系の集団として捉える事が出来る。すなわち、多くの要素が相互作用をしながら、全体として集団を形成することで現象が成り立っている。例えば、物理系ではジョセフソン素子回路、多モードレーザー振動、流体系における渦の動力学等々、化学系では化学反応系、分子クラスター等の分子多体系等々、生物系では代謝反応の巨大な回路、ニューラル・ダイナミクス、多細胞系等のネットワーク系が挙げられる。これらは多くの動的要素の集合が全体系を形成している。

非線形科学ではこれらの系を具体的なレベルから、あるいは抽象的なレベルから様々な角度で調べて来た。そこでは、局所的な動力学を部分系として、それらの多体相互作用系として対象を捉えた。上に挙げた例では、部分系が空間中でその近接する他の部分系と相互作用をしているシステムがある。それらは主に反応拡散系等の局所結合系として調べられて来た。一方、直接の相互作用が長距離に及ぶシステムや、何かの保存量を通じて結合しているシステムの場合、それらは要素が他の全ての要素と結合している大域結合系として捉える事ができる。非線形科学における大域結合系の研究はこれまで特に、カオス要素や非線形振動子の的大域結合系を中心に膨大な蓄積がある ([12, 13, 11] 等)。

ところで、これまでの研究では性質が一樣である多くの要素が相互作用をする系に関するものだった。しかし、上に挙げた多くの例においては、要素の性質が一樣である系は稀である。例えば、ニューラル・ダイナミクスでは系を構成するニューロンの性質は様々である。また、流体系における渦の動力学も、渦の性質はそれぞれ一樣ではない。

本章ではそれらを抽象的なレベルで考察する為に、カオス要素が大域的に結合する、大域結合カオス系: Globally Coupled Map(GCM) を調べる。その際、要素の性質の不均質性を個々の要素のダイナミクスを決めるパラメータが分布していて、要素毎に違っているということで表す事にする。そのうち本章では特に要素の振動がカオティックで要素間に明らかな相関が無い乱流相で見られる

協同現象, 特に要素による集団運動 (Collective Behavior) に関する研究である.

ここで, “集団運動 (Collective Behavior)” に関して簡単に触れておく. “協同現象” と “集団運動” の 2 語が明確に区別されて使われている訳ではない. “集団運動” の語は動的な要素の多体系 (特に大域結合系) において最近使われるようになった語で, 系のマクロな特徴を表しているオーダーパラメーターなどに非自明な運動が見られる時に使われている. 協同現象の研究では系のマクロな運動を取り出すことに主眼を置いたが, そのマクロな運動を集団運動として問題にした時はマクロな運動とミクロな運動 (個々の要素の運動) の関係性が主要な関心となる.

大域的な結合をしているカオス素子集団として以下のモデルを採用する.

$$x_{n+1}(i) = (1 - \epsilon)f_i(x_n(i)) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N f_j(x_n(j)), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (2.1)$$

ただし,  $x_n(i)$  は  $i$  番目の要素の状態を表す変数,  $f_i(x(i))$  はそれぞれの要素の内部動力学を表す. 各要素はカオス素子であるので, ここでは  $f_i(x(i))$  として, Logistic Map:

$$f_i(x) = 1 - a(i)x^2,$$

を用いる.  $a(i)$  は  $i$  番目の要素の非線形パラメータを表し, 区間

$$\left[a_0 - \frac{\Delta a}{2}, a_0 + \frac{\Delta a}{2}\right]$$

を一様に分布している (実際には  $a(i) = a_0 + \frac{\Delta a(2i-N-1)}{2(N-1)}$ ). また, 平均場  $h_n$  を以下のように定義する.

$$h_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(x_n(i)).$$

本章ではこの平均場がシステムのひとつの観測量として重要な役割を果たす.

式 (2.1) はヘテロなカオス素子が一様に全結合している系であるが, 多数のカオス素子が非一様に全結合する場合も考えられる (ニューラル・ネットワーク等). その場合は結合の強さを表す  $\epsilon$  が結合する要素間で分布するが, その系が示す動力学は本質的にモデル (2.1) と同様であると考えられる.

本章は以下のように構成される. これまで要素の性質が一様である GCM 系では乱流相においては, 平均場の揺らぎに関する議論から要素間に隠れた相関があることが示されて来た. §2.2 ではその性質を簡単に振り返る. 一方, モデル (2.1) で, 要素の性質が非一様である場合に, 同様の性質が見られるのであろうか. モデル (2.1) では平均場の振動が明らかな準周期的運動を示す. §2.3 では一つの具体例についてその詳細な性質を見たあとで, 考えられる問題点を整理する. §2.4 では, いろいろなパラメータ領域で平均場の動力学がパラメータの変化に対して低自由度系の分岐構造と同様な変化を示すことを示し, 平均場の運動における低自由度カオスの存在を探る. §2.5 では, 系のリャプノフ・スペクトルと平均場のダイナミクスの関係について触れる. 特に集団的運動が元々の系のリャプノフ・スペクトルに反映されない可能性に言及する. §2.6 では, 平均場の運動が  $x$  の分布関数の運動に関係している事を見る. §2.7 では, 平均場の準周期運動の機構を簡単な場合について示す. ここでは要素の分岐構造の組織化がマクロな現象の準周期運動として現われることを示す.

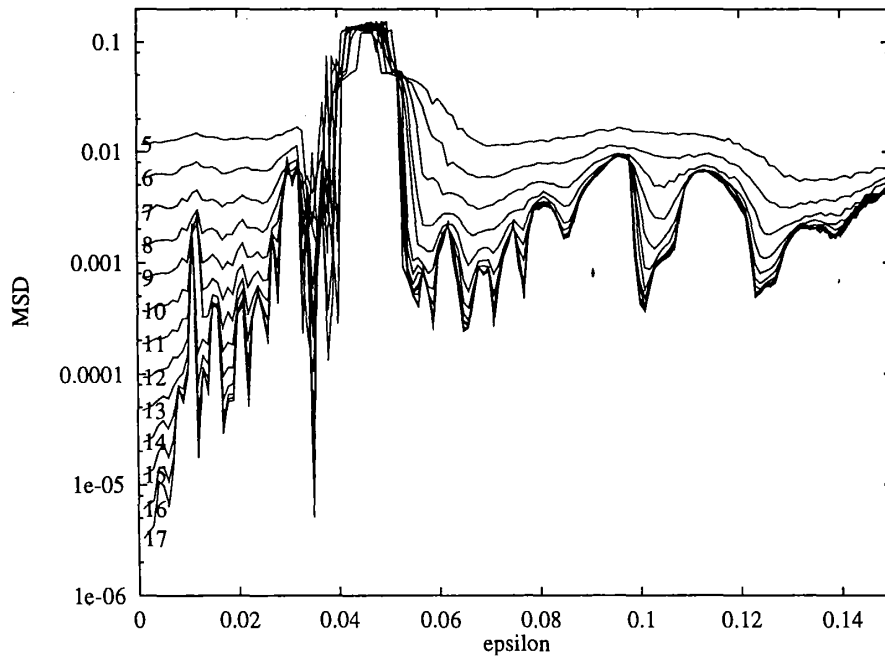


図 2.1. Mean Square Deviation (MSD) を結合の強さ  $\epsilon$  の関数として表したもの. システムサイズを  $N = 2^5$  から  $N = 2^{17}$  まで変化させた.

## 2.2 隠れたコヒーレンス: 要素の性質が一様である場合

本節では要素の性質が一様である GCM で乱流相 (turbulent phase) に見られる高自由度カオスの性質について振り返る [14]. これはモデル (2.1) で  $\Delta a = 0$  の場合に相当する.

$$x_{n+1}(i) = (1 - \epsilon)f(x_n(i)) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_n(j)), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (2.2)$$

$$f(x) = 1 - ax^2.$$

モデル (2.1, 2.2) には, 結合によって要素間の振動を同期させようとする作用とそれぞれの要素のカオス振動によって同期を破ろうとする 2 つの作用がある. 要素間の結合の強さ  $\epsilon$  が弱い場合や, 非線形性  $a$  が強い場合, 後者の作用が優勢になって系の状態は十分に発達した高自由度のカオス状態になる. この状態では要素の振動の間には一見して分かる相関は無く, また, 個々の要素の振動もカオティックである. 従って,  $N$  個の独立なカオス振動の集団と区別がつかない. そこでもしも, 実際にそのように見なす事ができるならば, そこでは, 統計的には大数の法則が成立し, また, 各要素の値  $x(i)$  の算術平均  $\frac{1}{N} \sum_i x(i)$  の分布が中心極限定理に従うことが期待される. モデル (2.1, 2.2) では

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_n(i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(x_{n-1}(i)) = h_{n-1}, \quad (2.3)$$

が成り立つので, 平均場に対して同様の議論が成り立つ.

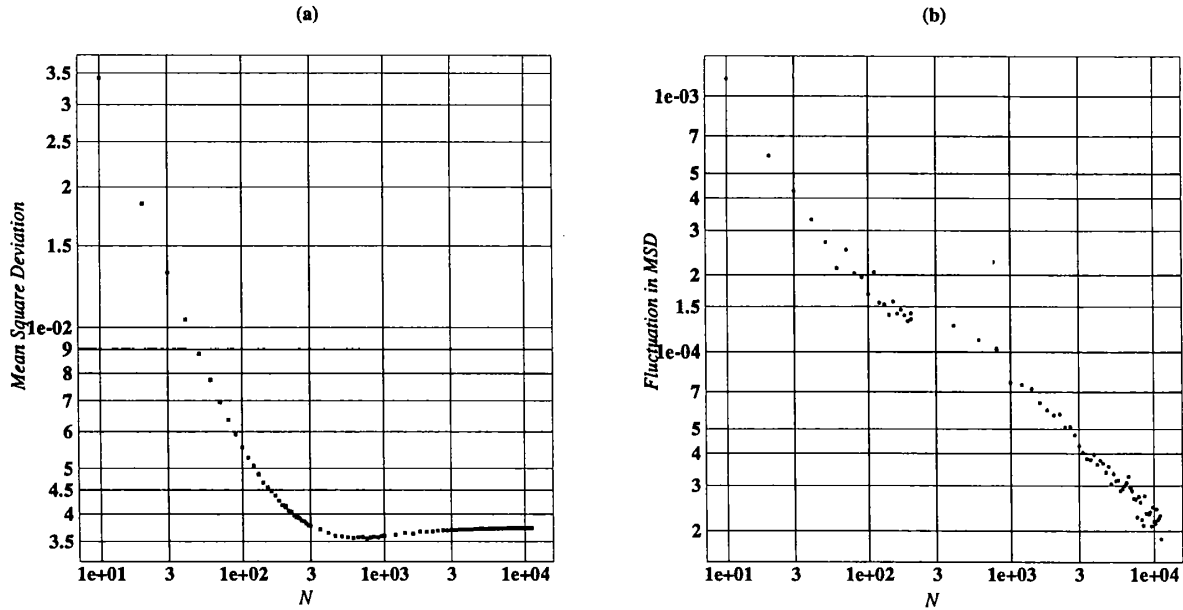


図 2.2. (a) は MSD をシステムサイズ  $N$  の変かとともにプロットしたもの. 縦軸は MSD. 横軸はシステムサイズ. (b) は多くの初期条件によって求めた平均場の MSD の揺らぎを, システムサイズ  $N$  の増加に対して書いたもの.  $a_0 = 1.9, \Delta a = 0.05, \epsilon = 0.11$ .

これらを確認するためには, 平均場  $h$  の分散, Mean Square Deviation (MSD)

$$\langle (\delta h)^2 \rangle = \langle (h - \langle h \rangle)^2 \rangle, \quad (2.4)$$

がシステムサイズ  $N$  に対して反比例し,  $h$  の分布がガウス分布に従うかことを調べればよい.  $\langle \cdot \rangle$  は  $h$  の分布に対して平均をとることを意味する. MSD は分布の揺らぎの大きさを表す量で, 系が大数の法則に従うならば  $N^{-1}$  に比例する.

図 2.1 では MSD を結合の強さ  $\epsilon$  の関数として, 幾つかのシステムサイズについてプロットした. そこでは MSD がシステムサイズの増大とともにある定常値に漸近して行くことがわかり, 大数の法則が破れている事が分かる.

このように, GCM ではシステムサイズ  $N$  の増大と共に, 平均場の分布がガウス分布に近付き, MSD が  $N^{-1}$  で減少していくが, しかし, あるシステムサイズ  $N_c$  を越えると MSD は減少を止め, 平均場の分布がガウス分布から外れていくことが分かっている.

このことは, 要素の振動がもはや独立ではなく相関を持ち, なんらかの構造が存在する事を示している. これは, “隠れたコヒーレンス (hidden coherence)” としてカオス大域結合系に広く見られる性質として知られている [14, 15, 16, 17, 18, 19].

## 2.3 非一様な要素の大域結合系: 一例から

それでは、モデル (2.1) の乱流相では同様の性質が見られるのであろうか. 平均場の揺らぎの振る舞いから始めよう.

図 2.2(a) はあるパラメータ ( $a_0 = 1.9, \Delta a = 0.05, \epsilon = 0.11$ ) でシステムサイズ  $N$  を増やしていった時の MSD(式 (2.4)) の振る舞いの変化をプロットしたものである. この図から分かる通り MSD はあるシステムサイズまでは  $N$  に反比例して減少していく. しかし, それを越えた所で増大に転じ, その後, ある定数値に落ち着いている (MSD の異常な回復). 我々が導入した MSD(式 2.4) は平均場の分布幅の程度を表す指標であると考えられる事のできるので, 図 2.2(a) の結果は要素間に振動の相関があることは勿論のこと, 分布に何らかの構造があることを示唆している.

図 2.2(b) は多くの初期条件によって平均場の MSD を求め, その MSD の分布の揺らぎ  $\langle (MSD - \langle MSD \rangle)^2 \rangle$  を見積もった. ここでの  $\langle \cdot \rangle$  は様々な初期条件に対して計算する. その値をシステムサイズの増大とともにプロットした. システムサイズの増大とともに値は線形で下がっており, MSD という統計量がある値に収束していくことがわかる. これから,  $\Delta a = 0$  の場合と同様に系で大数の法則が破れ, 要素間に何らかの相関がある事を示している.

そこで, パラメータを同じ値 ( $a_0 = 1.9, \Delta a = 0.05, \epsilon = 0.11$ ) に固定して系の性質を詳しく見ることにする. 図 2.3(a) は, このパラメータでの各要素の軌跡  $x_n(i)$  の一部を重ね書きしたものである. 一つ一つの要素の軌跡はカオティックであり要素の間に一見してわかる相関はない. これは, 系の状態が十分に発達した高自由度カオスの状態 (乱流相) で系の自由度はシステムサイズ  $N$  と同程度であることを意味している.

振動の同期が無い事は以下のように振動の (非) 同期の度合を表す分離指数を導入することで簡単に見ることが出来る. 分離指数は

$$\lambda_{split}(i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_n^T \log |(1 - \epsilon)f'(x_n(i))|, \quad (2.5)$$

で与えられ, 要素  $i$  と他の要素の振動の差異の  $T \rightarrow \infty$  での漸近挙動を指数で表したものである. 0 より大きければ要素  $i$  と他の要素の軌道の微小差異は指数関数的に広がり 0 より小さければ指数関数的に小さくなることを示す. 図 2.4 は横軸にそれぞれの要素の非線形性の値を取り, 縦軸はそれに対応する分離指数をプロットしたものである. 全ての要素の分離指数が正であり, 振動の同期が起こっていないことが分かる. (もちろん, 正確に系の有効 (effective) な自由度を知るためには相空間の次元の広がりを知る必要があり, リャプノフ・スペクトルによる解析をしなければならない.)

ところで, 普通, 実験の観測結果から系の性質を知る際に, 我々はしばしば 1 次元の実験データから “埋め込み” の方法によって系の動力学を再現する. それは元々の系のアトラクターの位相的特徴を再構成する. したがって, 1 次元の観測量は元々の系の有効的な自由度を持っていることになる. それを単純に敷衍するならば, 我々の系で平均場の動力学は系の有効的な自由度と同程度の自由度を示すはずである.

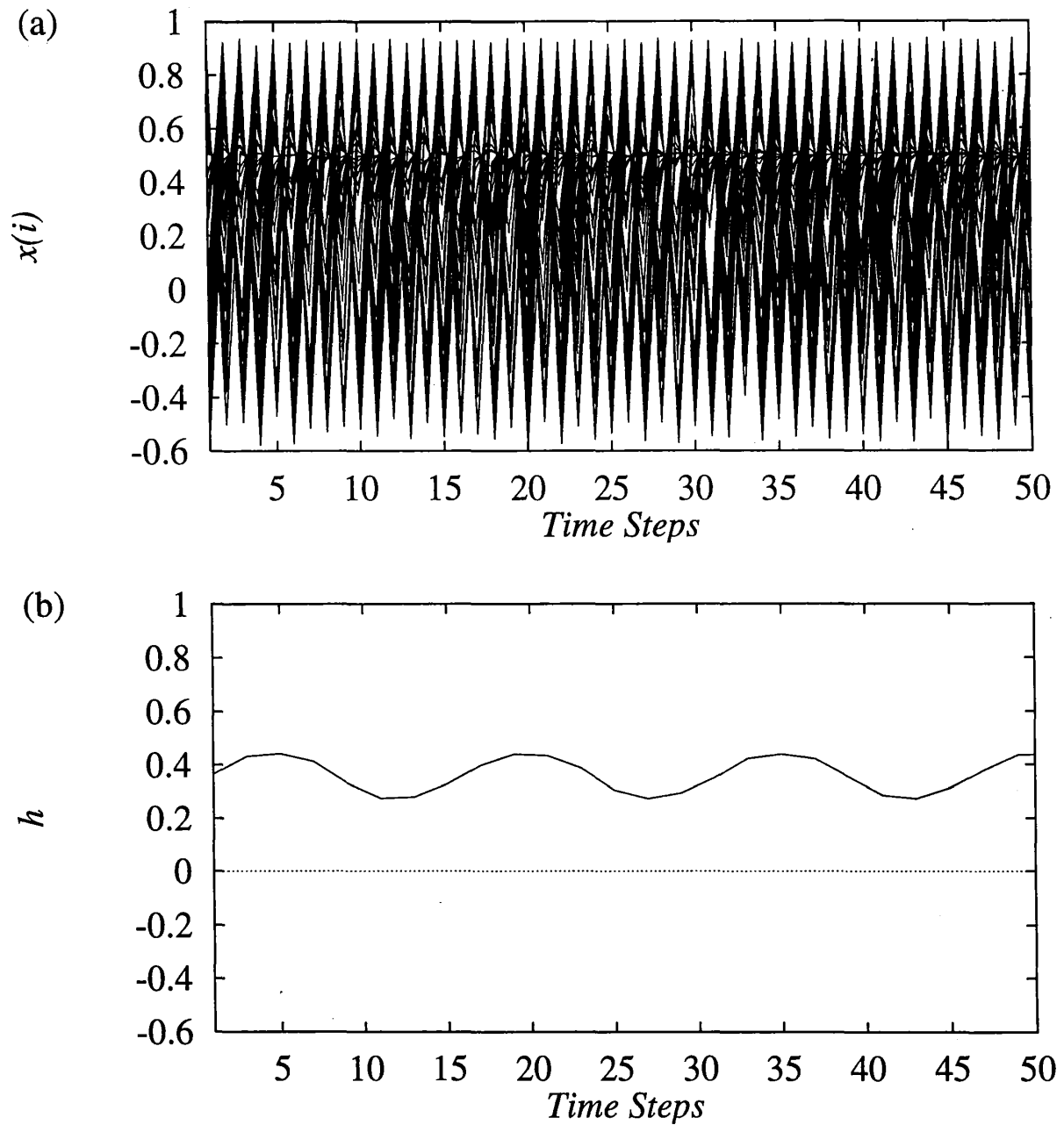


図 2.3. 各要素および平均場の軌跡 (a) 各要素の軌跡を重ね書きしたもの.  $N = 2^{16}$  から非線形性の分布が一様になるように 64 個の要素の軌跡を取り出した. (b) その時の平均場の時間発展. 各 2 ステップおきに描いた.  $a_0 = 1.9, \Delta a = 0.05, \epsilon = 0.11, N = 2^{16}$



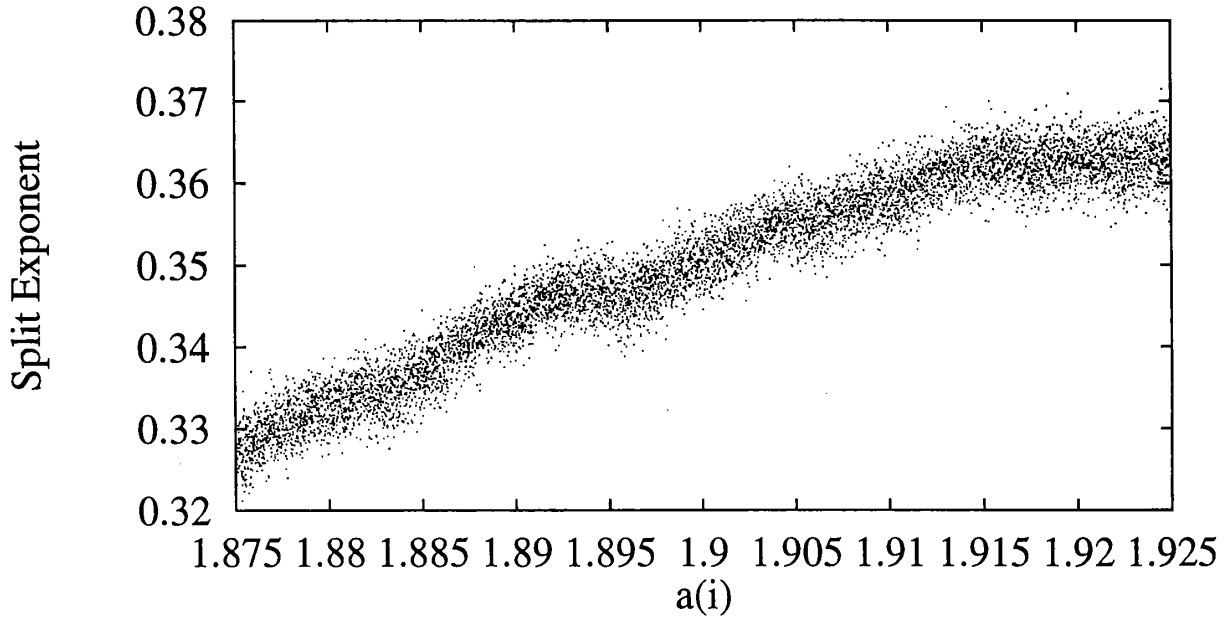


図 2.4. 分離指数. 横軸に各要素の非線形性  $a$ , 縦軸にそれに対応する分離指数をプロットした. パラメータは前と同じである.

図 2.3(b) はこの時の平均場  $h_n = \frac{1}{N} \sum_j f_j(x_n(j))$  の時間発展を描いたものである. 平均場は系の一つの統計量であり, 観測量である. しかし, その軌跡は個々の要素の軌跡からは想像できない低自由度の周期性振動があることがわかる. そして, 平均場の動力学を時刻  $n$  の値  $h_n$  から, 時刻  $n+1$  の値  $h_{n+1}$  への写像として表したリターン・マップ (2 次元空間への埋め込み) (図 2.5) はそれが準周期的な運動であることを示唆している. つまり, 平均場が系の有効な自由度である  $N$  に比べて非常に小さく, 上で述べた埋め込みの議論が成り立っていないように思われる. そこで, 以下ではこの平均場の性質を詳しく調べ, その運動が明らかな準周期運動であることを示す.

平均場の時間構造を調べるために平均場の時系列のパワースペクトルを見る (図 2.6). 時系列のパワー・スペクトルは, 鋭いピークを持ち平均場の動力学が 2 次元トーラス  $T^2$  上の準周期運動であることを示している. その固有振動数は約  $f_1 = 0.435$  であり, その調和成分として  $0.131 \simeq 1.0 - 2f_1$  や  $0.040039 \simeq 7f_1 - 3 \times 1.0$  といったその逆数が整数に近い値の振動数を周期的軌跡として観測される. 前者は約 7 周期や後者は約 25 周期で, 図 2.5 で軌道は 7 周期で元の位置の近くに戻ってくるように見えることがわかる. 一方, 平均場の運動の低周波成分は低いレベルに押さえられており (図 2.6), 平均場の準周期的動力学の周りの揺らぎは白色雑音として見做し得ることを示している.

次に, トーラス面の 1 次元性を確かめるために相関次元 (Correlation Dimension) による解析を行なう. 相関次元  $D_2$  は実験等のデータから簡単にフラクタル次元を計算するために導入されたものである. まず埋め込みの方法によって  $d$  次元ベクトル

$$\vec{z}_n^d = \{x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-d+1}\},$$

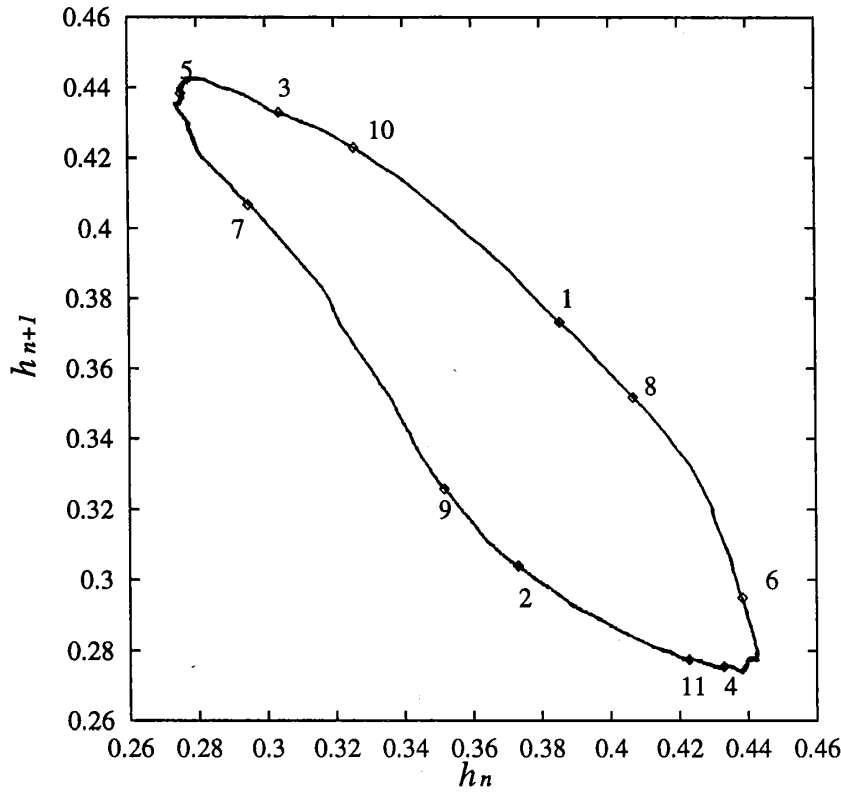


図 2.5. 平均場のリターンマップ

縦軸は  $h_{n+1}$ . 横軸は  $h_n$ . 図中の  $\diamond$  は軌道を追ったもので, 番号はその順番. 系のパラメータは図 2.3 を参照.

を作り, それによって求められる  $d$  次元空間での 2 体相関関数の積分,

$$C_d(r) = \frac{1}{K^2} \sum_{i,j}^K H(r - \|\vec{z}_i - \vec{z}_j\|)$$

が  $r$  に関して  $C_d(r) \sim r^\nu$  のように依存する時, 相関次元  $D_2$  は,

$$D_2 = \frac{\log(C_d(r))}{\log(r)}$$

と表される. ただし,  $H(z)$  はヘビサイド関数で

$$H(z) = \begin{cases} 1 & (z \geq 0) \\ 0 & (z < 0) \end{cases}$$

また,  $\|\cdot\|$  は  $d$  次元ベクトル空間で定義された距離である. 図 2.7 で見られるように, 相関次元はシステムサイズ  $N$  の増大とともに 1 次元に漸近していく. これはトーラス面のまわりの揺らぎが  $N$  の増大とともに減少する事を表している. 一方,  $r$  の小さい領域では傾きは大きくなり高次元性を示

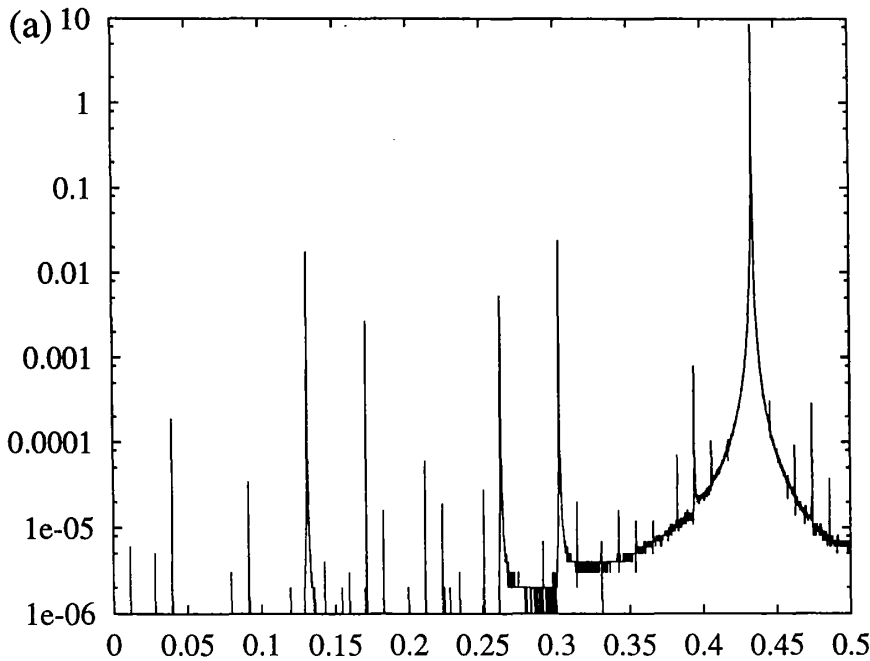


図 2.6. 平均場の時系列のパワー・スペクトル

横軸は振動数. 縦軸はパワースペクトルで対数目盛り.  $f_1 = 0.435$  にピークを持ち残りのピークは  $f_0 = 1$  と  $f_1$  の調和成分. 系のパラメータは図 2.3 を参照

している. 図では埋め込み次元が 8 であるので, 傾きは 8 に漸近して行く. このことは,  $N$  は非常に大きい, しかし, 有限であることの反映で, トーラス面には常に揺らぎが伴う事を表している. その揺らぎは元々の系の高自由度性を反映して非常に高自由度な性質を示すものと思われる. このように, ある粗視化のレベルでは低自由度性が見られるが (明らかな 1 次元), 粗視化の精度を上げていくと元々の高自由度性が回復するものと思われる.

先に述べた平均場の “MSD の異常な回復” は平均場にトーラス運動が存在して, システムサイズ  $N$  の増大に伴ってトーラス面のシャープネスが上がることで説明がつく.

以上のように平均場のダイナミクスは  $T^2$  トーラス上の運動であり, これが高自由度カオスの中に現れている事を示している.

このような平均場での明らかな構造の存在は,  $\Delta a = 0$  の場合では見られなかった現象であり, 一般的な性質に進む前にいくつか問題点を整理しておく.

(i) 我々の大域結合カオス系がこれまでのシステムと違う点はそれを構成する要素にバラツキがある点である. 非線形性が分布していることと, ここで挙げたような平均場におけるトーラス運動という集団運動はどのような関係にあるのだろうか. また, ここで挙げたような協同現象が分布の効果によって現われ易くなっていると言えるのだろうか.

(ii) 十分に発達した高自由度カオスを含む状態でシステムサイズを増やしていった時, 他にどのような協同現象を見ることが出来るのだろうか? これは平均場の分散 MSD の変化や個々のパラメータにおける平均場のリターンマップ等を見ることで分かるであろう.

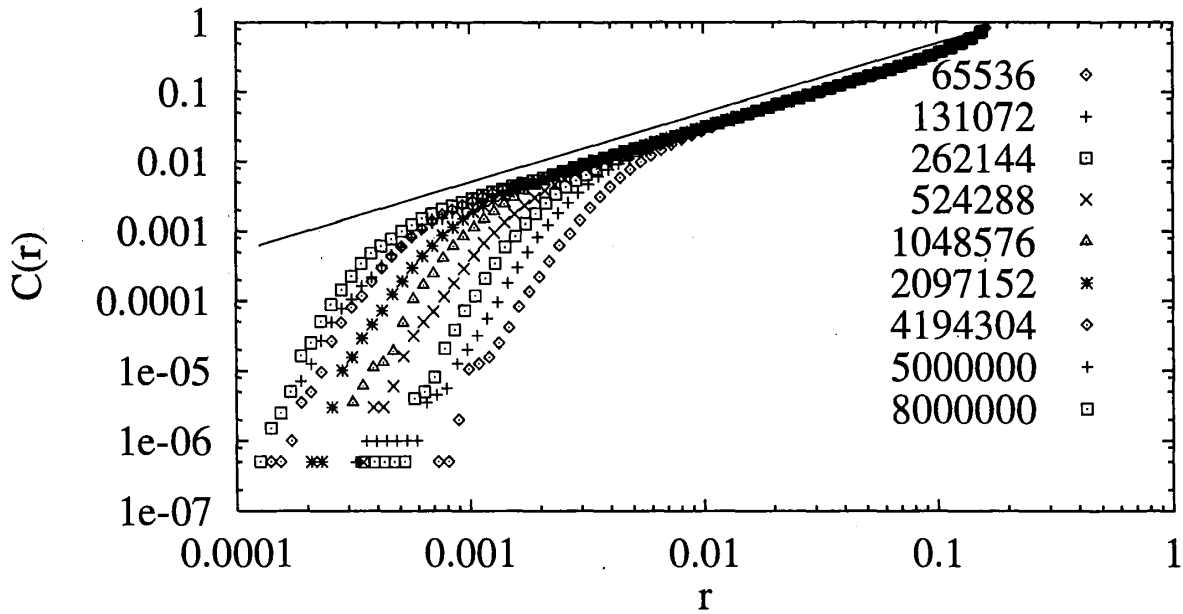


図 2.7. 相関次元を見るために、相関関数の積分  $C(r)$  のプロットしたもの。いくつかのシステムサイズ  $N$  に対する結果を重ね書きしている。図中の数字はシステムサイズとそれに対応する印を表している。横軸は  $r$ 、縦軸は  $C(r)$ 。埋め込み次元は 8 である。図中の直線は傾き 1 である。また、 $r$  が小さい領域では傾きは 8 である。パラメータ等は同じ

(iii) 個々の要素の間にはほとんど相関が見られない系で、如何なる機構が関与して、ここで挙げた例のような平均場の準周期運動が現われるのだろうか。また、平均場の運動というマクロな現象と個々の要素の動力学というミクロな現象とはどのような関係にあるのだろうか。特に、我々の系では個々の要素の動力学は常に平均場を参照していると考えられる事ができるが、一方で自らが平均場を構成するという構造を持っている。集団的運動はこの構造の中で捉えられるのか。

(iv) 協同現象はどんな統計量に反映されるのだろうか。我々は力学系の性質を分ける統計量としてリャプノフ・スペクトルに馴染み深い。はたして、協同現象はリャプノフ・スペクトルに反映されるか。

(v) 元々の系は自由度がシステムサイズと同程度の高自由度カオスである。高自由度性は平均場振動の中にどのように現われるか。ここで挙げた例においては平均場の構造を相関次元によって解析した結果からは、高自由度性が低自由度運動の周りの揺らぎとして現われることを示唆している。その揺らぎはどんな場合でもシステムサイズの増大で減少するのだろうか。その性質は相関次元による解析によってある程度分かるかもしれない。もしも、システムサイズ  $N$  の増大と共に揺らぎがどこまでも減少していくならば、その極限にあるトーラス曲面は元々の系のもつ高自由度性の名残とも言えるその周りの揺らぎから分離されたことになる。はたしてこの様にマクロな変数の低自由度運動とミクロな変数の高自由度運動は分離可能だろうか。また、同様の解析によっても平均場の動力学に微細な構造があるならば分かるはずである。

(vi) 最後にここに挙げたいいくつかの問題は決して独立ではなくその間の関係を考えねばなるまい。これまでにも報告されている他の力学系における協同現象と合わせて、協同現象の数理として何か浮かび上がっては来ないか。

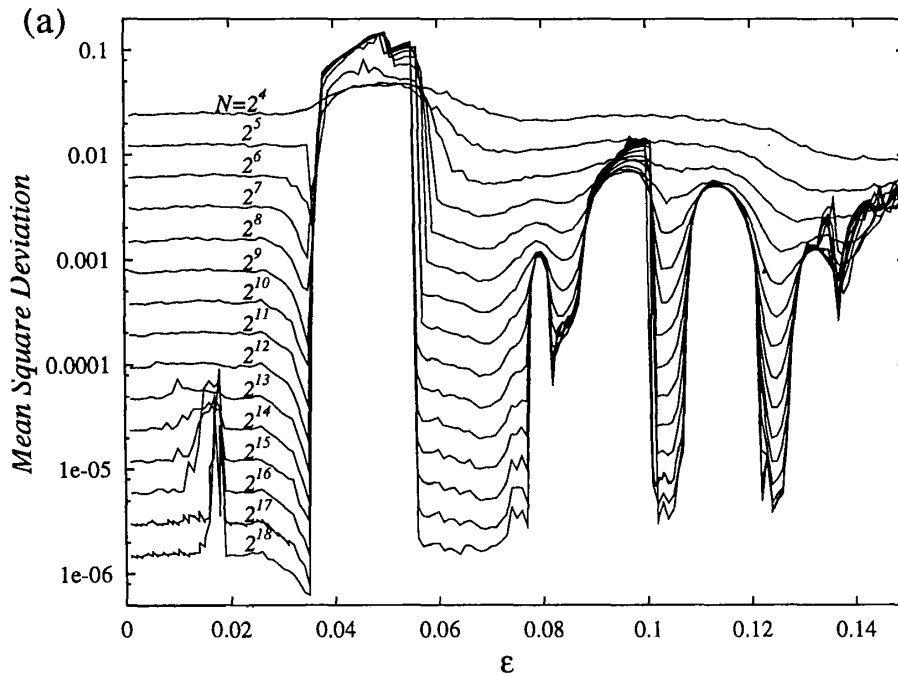


図 2.8. Mean Square Deviation(MSD) を結合の強さ  $\epsilon$  の関数として表したもの. システムサイズを  $N = 2^4$  から  $N = 2^{18}$  まで変化させた.  $a = 1.9, \Delta a = 0.05$ .

以下ではこれらの問題を踏まえて、系の特徴を順次述べてゆく。

## 2.4 多様な平均場構造

ここでは乱流相で見られるいくつかの事例から準周期運動がパラメータ空間の広い範囲で一般的に見られる事を示す。また、平均場が低自由度性のカオスを示す可能性を議論する。

再び平均場の揺らぎから始めよう。図 2.8 は MSD の振る舞いの変化を要素間の結合の強さ  $\epsilon$  の関数として描いたもので、システムサイズを順次増大していった。また、その中から MSD の典型的な振る舞いを幾つか取り出したのが図 2.9 である。MSD の振る舞いは前章と同様で、減少の後、増加に転じ定数に漸近していく。前章での結果と併せて考えると、パラメータの広い範囲で、平均場がある秩序を持つ可能性 (例えば前章で見たような準周期運動) を示唆している。

§2.3 において挙げた例の他にどのような集団現象が見られるであろうか。以下ではそれを見て行く。

図 2.10 はパラメーターの内、要素間の結合の強さを表す  $\epsilon$  のみを変化させた時に見られる平均場のアトラクターの例の幾つかを描いたりターンマップである ( $a_0 = 1.9, \Delta a = 0.1$ )。  $\epsilon$  を順に下げていくと周期にロッキングされた状態 (図 2.10(a)) から、準周期運動 ( $T^2$  トーラス) が生まれ (図 2.10(b)), それが倍加し (図 2.10(c)), さらに複雑な運動に転移していく様子がわかる (図 2.10(d))。

順に見ていこう。図 2.10(a) では平均場が 3 周期にロッキングした状態である。この際の平均場の時系列のパワースペクトルを表したのが図 2.11(a) である。振動数が  $\frac{1}{3}$  で鋭いピークが立っている

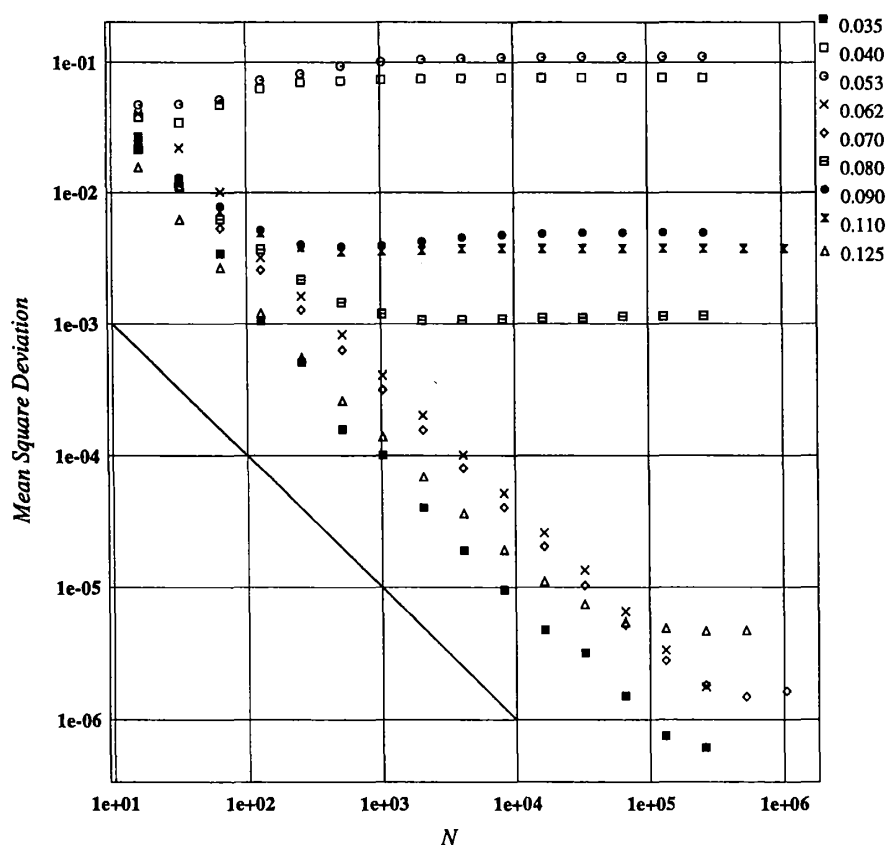


図 2.9. MSD をシステムサイズ  $N$  の増大に対してプロットした.  $a = 1.9, \Delta a = 0.05$  で  $\epsilon$  を変えた. 右上が  $\epsilon$  の値.

ころからもそのことがわかる. ただし, 振動数が  $\frac{1}{6}$  や  $\frac{1}{12}$  にもピークが見られ, 周期の倍加が引き続いて起こっている.

図 2.10(b) では線に幅があるものの, 準周期的な運動が発生していることがわかる. 図の中に併せて描いた 6 ステップの点の変化を追うと, 3 周期的な振動をしているが, それが完全に閉じてしまわないで, 少しずつずれていくことで準周期運動が起こっている. このことはパワースペクトル (図 2.11(b)) からわかる. システムの振動数は  $f = 0.3353$  程度であり  $\frac{1}{3}$  に近い. しかし,  $\frac{1}{3}$  からのずれが調和成分となって現われて 170 周期程度の長い振動があらわれる ( $3f - 1$ ). 更にパワー・スペクトルを詳しく見ると,  $f/2$  の弱い周期倍加成分のピークが見られ, リターンマップ (図 2.10(b)) には倍加の様子は見られものの周期倍加が始まっていることが分かる. またパワー・スペクトルの両対数グラフから, 低周波成分は白色雑音として見做せることを示しており, このことから, 元々の系の自由度の中から平均場が示す低自由度動力学が分離可能であることを示唆している.

図 2.10(c) ではトーラスが 2 重化している. これは倍加トーラス (doubling torus) と呼ばれ, 準周期状態からカオスに至る道の途中で見られることが分かっている. 倍加していることはパワースペクトル (図 2.11(c)) に,  $f = 0.3354$  の強いピークとその調和成分の他に  $f/2$  の周期倍加成分があることから分かる. 図 2.10(c) をさらに詳しく見ていくと, トーラスを太い幅を持っているが, そ

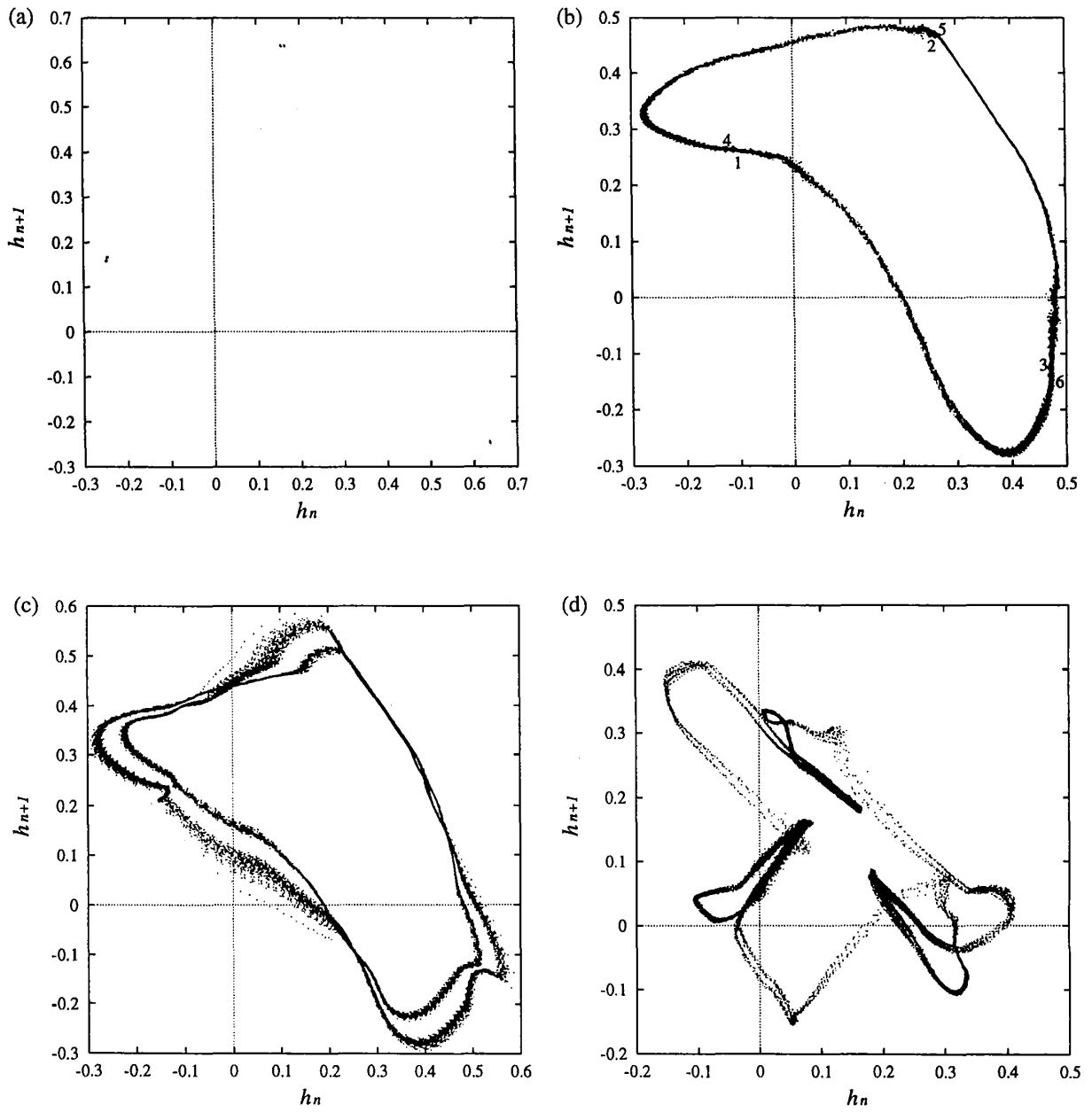


図 2.10. 平均場のリターン・マップ

- (a)  $a = 1.9, \Delta a = 0.1, \epsilon = 0.055, N = 2^{16}$
- (b)  $a = 1.9, \Delta a = 0.1, \epsilon = 0.053, N = 2^{18}$
- (c)  $a = 1.9, \Delta a = 0.1, \epsilon = 0.05, N = 2^{21}$
- (d)  $a = 1.9, \Delta a = 0.1, \epsilon = 0.039, N = 2^{16}$

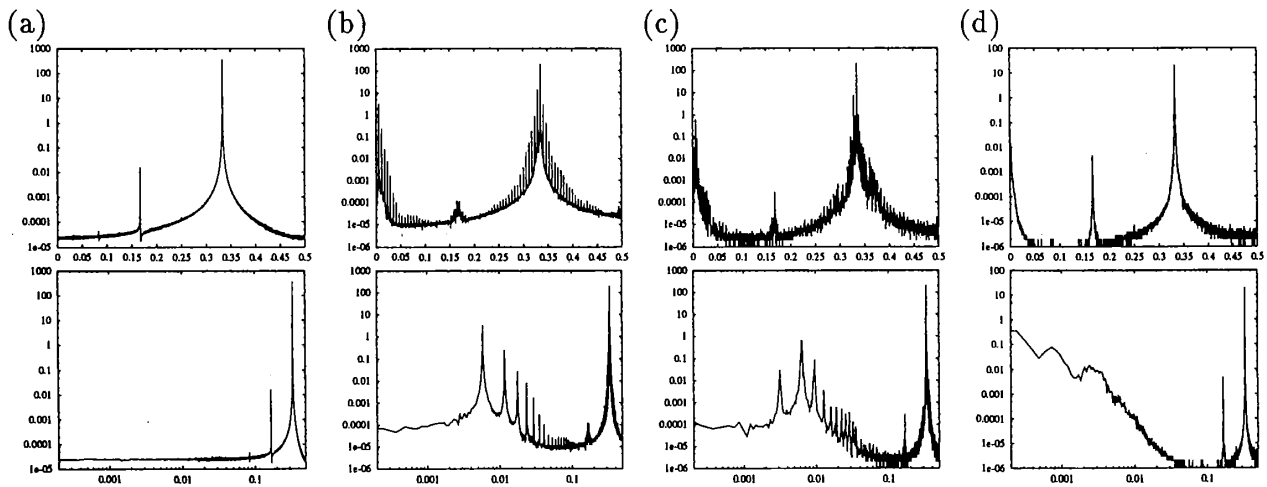


図 2.11. 平均場の時系列のパワー・スペクトル. 横軸は周波数, 縦軸はパワースペクトル. 上段は縦軸が対数目盛り, 下段は両軸が対数目盛りで, 上段と同じパラメータに対するプロットである. パラメータは  $a = 1.9, \Delta a = 0.1$ , 右から  $\epsilon = 0.055, \epsilon = 0.053, \epsilon = 0.05, \epsilon = 0.039$ .

れが線の周りのノイズというよりもむしろ, ある種の構造を持っているように見える.

図 2.10(d) では平均場は一見すると複雑な構造の運動をしている. パワースペクトル (図 2.11(d)) はこの運動も準周期的であることを示しており, また, 周期倍加のピークも鋭くなっている. 奇妙な形をしているものの, この平均場の動力学は基本的には倍加トーラス上の運動であることが分かる. 一方でパワー・スペクトルの両対数グラフで, その低周波成分がベキ的に振舞っていることが分かり, 長時間の相関を持つ可能性を示唆している.

図 2.12 は他のパラメータで  $\epsilon$  を変化させた. 同様にトーラス  $\rightarrow$  倍加  $\rightarrow$  周期ロッキング  $\rightarrow$  トーラス  $\rightarrow$  カオス (?), という変化が見られる.

一方, 図 2.13 は他のパラメータ領域での平均場のリターンマップである. この場合, 平均場の構造は準周期的には見えない. また, 完全に乱数的でもない, 何らかの構造をもっているように見える. パワースペクトルは  $f = 0.4005$  にピークをもち, ロッキングに極めて近い状態であることを示している. 低自由度カオスであるかどうかはこれだけでは判断できない.

以上のように, 我々の系はパラメータの変化に対して, 低自由度系で見られるカオスへ至る分岐構造と同様の構造を見る事が出来る. このことは, 平均場における低自由度カオス (集団的カオス) の存在を示唆している.

## 2.5 協同現象と統計量

これまで, 幾つかの協同現象を見てきた. そこでは, 平均場の集団的運動の発生について平均場に関する MSD の振舞が 1 つの指標になることを見て来た. しかし, これまで見て来た MSD の振舞は要素間に何らかの相関が存在し平均場が構造を持つことを示唆はするが, それ以上は何も教えてはくれない. これらの現象は他のどのような統計量によって特徴付けることが出来るのだろうか.



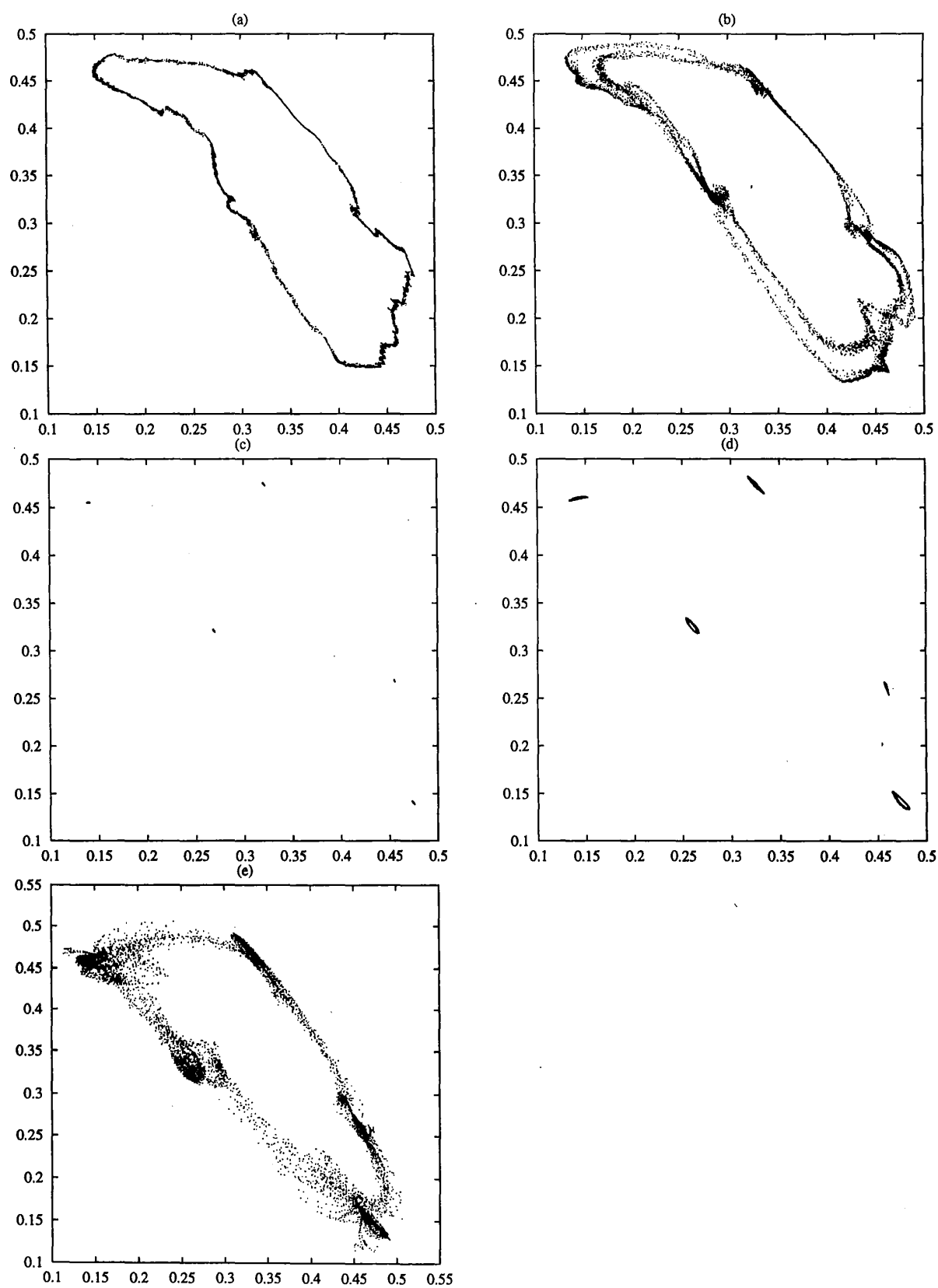


図 2.12. 他のパラメータでの平均場の構造. 横軸は  $h_n$ , 縦軸は  $h_{n+1}$ ,  $a = 1.9, \Delta a = 0.05, N = 2^{24}$ , (a)  $\epsilon = 0.095$  (b)  $\epsilon = 0.096$  (c)  $\epsilon = 0.097$  (d)  $\epsilon = 0.0975$  (e)  $\epsilon = 0.097$

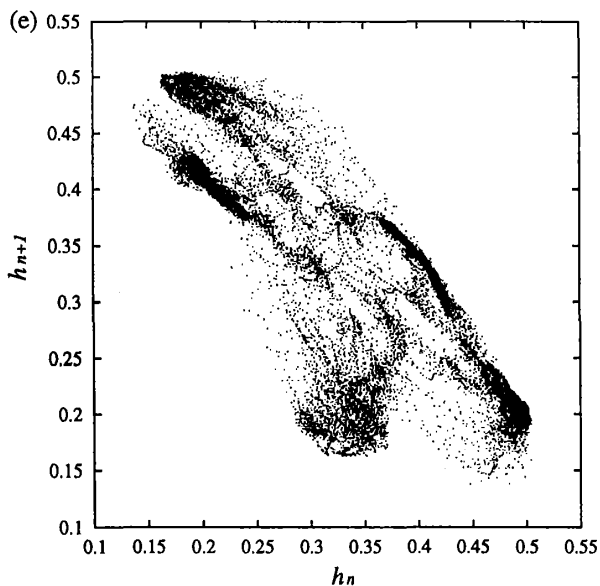


図 2.13. 平均場のリターンマップ.  $a = 1.92, \Delta a = 0.088, \epsilon = 0.1, N = 2^{20}$

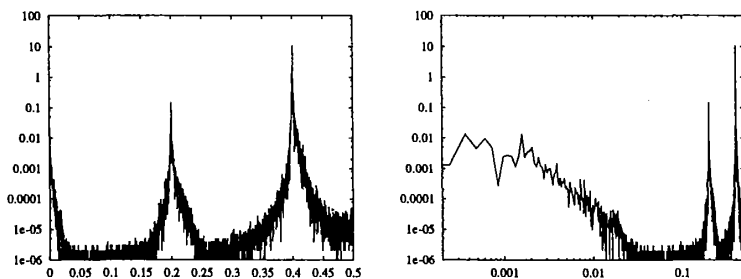


図 2.14. 前図に対応するパワースペクトル.  $a = 1.92, \Delta a = 0.088, \epsilon = 0.1, N = 2^{20}$

### 2.5.1 通常のリャプノフ・スペクトル

力学系の大域的な安定性・不安定性を表す統計量として、リャプノフ・スペクトルがよく知られている。リャプノフ指数は元々のシステムを線形化し、十分長い時間発展を考えた時のその線形化システムの解の漸近挙動が如何なるものであるかを指数関数的発展  $\exp(t)$  と比較して、指数として表したものである。線形化系の解を  $x(t)$  とすると、リャプノフ指数  $\lambda$  は  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log(x(t))$  と表される。

モデル (2.1) は多次元系である。時刻  $n$  におけるヤコビ行列を  $M_n$  とすると、 $\prod_{i=0}^n M_i$  の固有値  $\Lambda_i(n)$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) を用いて、

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(\Lambda_i(n)) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

としたものをリャプノフ・スペクトルという。

リャプノフ・スペクトルはシステムの微小差異の時間発展に関する量で、系の安定性・不安定性を議論するためにしばしば用いられる。リャプノフ指数が正の場合は系が線形不安定であることを示

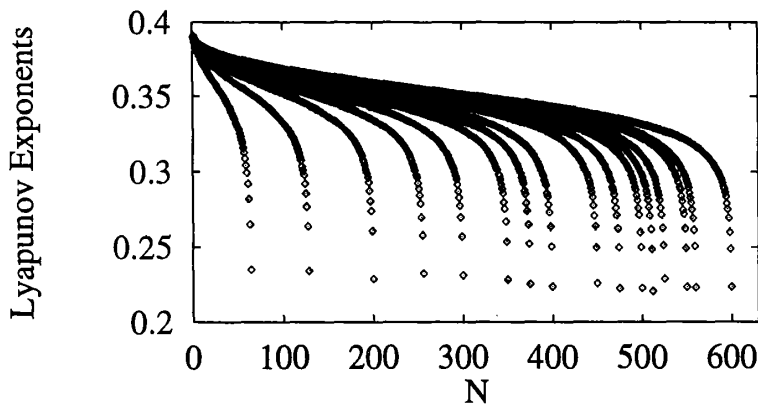


図 2.15. リャプノフ・スペクトル. 横軸はシステムサイズ. 縦軸はリャプノフ・指数. 幾つかのシステムサイズについて計算したリャプノフ・スペクトルを重ね書きした. 今注目するのは最小のリャプノフ・スペクトルである.  $a = 1.9, \Delta a = 0.05, \epsilon = 0.11$ .

しシステムの微小な差異が線形の範囲で指数関数的に増大していくことを示している. 一方, リャプノフ指数が負の場合は線形安定であることを示しシステムの微小な差異が線形の範囲で指数関数的に減少することを表している. 系がカオティックである場合にはリャプノフ・スペクトル  $\lambda$  は正を含む. また, 系が固定点や周期運動である時は負を示す. 系が準周期運動を示す場合には通常リャプノフ・スペクトルは 0 を含み, 差異が指数関数的に増大も減少もしない中立安定であることを示している.

では, モデル (2.1) の時間発展から得られるリャプノフ・スペクトルに, 集団的運動に対応する指数は含まれるであろうか.

まず初めに, 平均場が固定点である場合を考えよう. これは, MSD がシステムサイズの増大と共に  $N^{-1}$  で現象していく場合で,  $N \rightarrow \infty$  の極限として平均場が固定点になる場合である. それは, モデル (2.2) において  $f(x)$  が Tent Map  $f(x) = -a|x| + a$  である場合に実現されている [14]. その際, 平均場は定数であるので式 (2.2) から  $N$  個の要素は独立になると考えることが出来る. 従って, 系のリャプノフ・スペクトルには  $N$  個の独立な要素に対応するリャプノフ指数があるだけであり, 固定点の存在を示す負のリャプノフ指数はない. この場合, 我々はこの固定点を力学系におけるそれと見るよりも, 統計力学における統計集団 (アンサンブル) の平均としての定数と見るべきかも知れない.

平均場の動力学が準周期運動の場合はどうであろうか. 通常力学系が準周期運動を示す場合, リャプノフ・スペクトルには 0 が含まれる. 一方 §2.3 で見た例 (図 2.3, 図 2.5 等) では平均場に見られる集団運動を考慮に入れないとリャプノフ・スペクトルは全て正である. そこでシステムサイズを増やしていった時に一番小さい “最小リャプノフ指数  $\lambda_N$ ” が 0 に漸近するかどうかを問題にしよう. 図 2.15 は数値的に求めたリャプノフ・スペクトルである. 最小リャプノフ指数  $\lambda_N$  は, システムサイズの増大に伴って減少していく. しかし  $N \approx 400 \sim 500$  で  $\lambda_N$  は減少するのを止め, 0 より大きい定数に漸近していく. このことは, 図 2.2 において平均場の揺らぎ (MSD) が  $N \approx 400 \sim 500$  で減少から増加に転じ, 後に定数に留まることに対応しているように見える. 従って, リャプノフ・

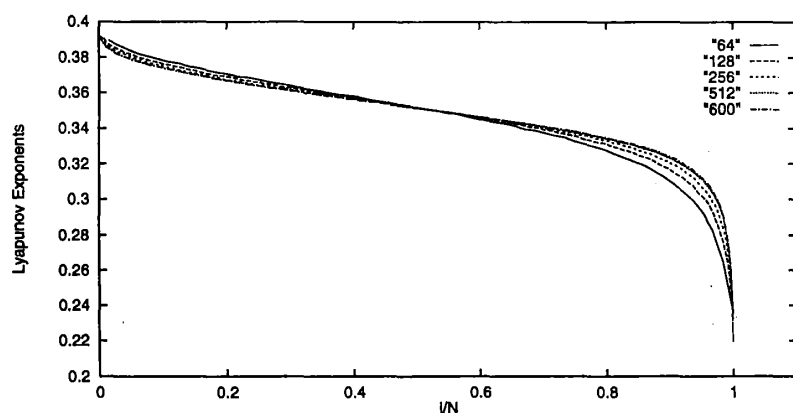


図 2.16. スケールしたリャプノフ・スペクトル. 大きいものから数えて  $i$  番目のリャプノフ指数を横軸の値を  $i/N$  としてプロットした.  $N = 64, 128, 256, 512, 600$ .  $a = 1.9, \Delta a = 0.05, \epsilon = 0.11$ .

スペクトルに通常, 準周期運動の存在を示す 0 は存在しないと予想される.

また, 図 2.16 は各システムサイズ  $N$  で大きいものから数えて  $i$  番目のリャプノフ指数  $\lambda_i$  を横軸を  $i/N$  としてプロットしたものである. システムサイズを増やすにつれてスペクトルの形は平坦になってゆく.

ここでは数値的方法によって  $N \rightarrow \infty$  リャプノフ・スペクトルに 0 が存在しないことを予測したが, 厳密な形で示されたわけではない. リャプノフ・スペクトルに 0 がないにもかかわらず, 平均場が準周期運動を示すのは, これまでの力学系に関する常識からは理解が出来ない事である. 平均場の準周期運動が通常の力学系でのそれとは異なり, リャプノフ・スペクトルに 0 がなくても成り立つ事を厳密な形で示す必要がある.

この様に, 集団的な運動が必ずしもリャプノフ・スペクトルに反映されるとは限らないことを見た. これは, 以上でみたリャプノフ・スペクトルがミクロな動力学に関係するのに対して, 平均場はマクロな運動である, というに関係している. 集団的運動がリャプノフ・スペクトルに現われない例は他のシステムでも見られる [20].

### 2.5.2 平均場のリャプノフ数

我々が知りたいのは平均場の動力学に対応する統計量である. ならば, 平均場のリャプノフ指数と呼べる量は考えられないであろうか. つまり, 平均場に対する外部からの摂動  $\delta h_0 \rightarrow 0$  に対する  $n \rightarrow \infty$  での  $\delta h_n$  の漸近挙動を考え,

$$\lambda_h = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left( \left| \frac{\delta h_n}{\delta h_0} \right| \right)$$

を平均場のリャプノフ指数と呼ぼう. ただし,

$$\delta h_n = \frac{1}{N} \sum_j f'(x_j(n)) \delta x_n(j)$$

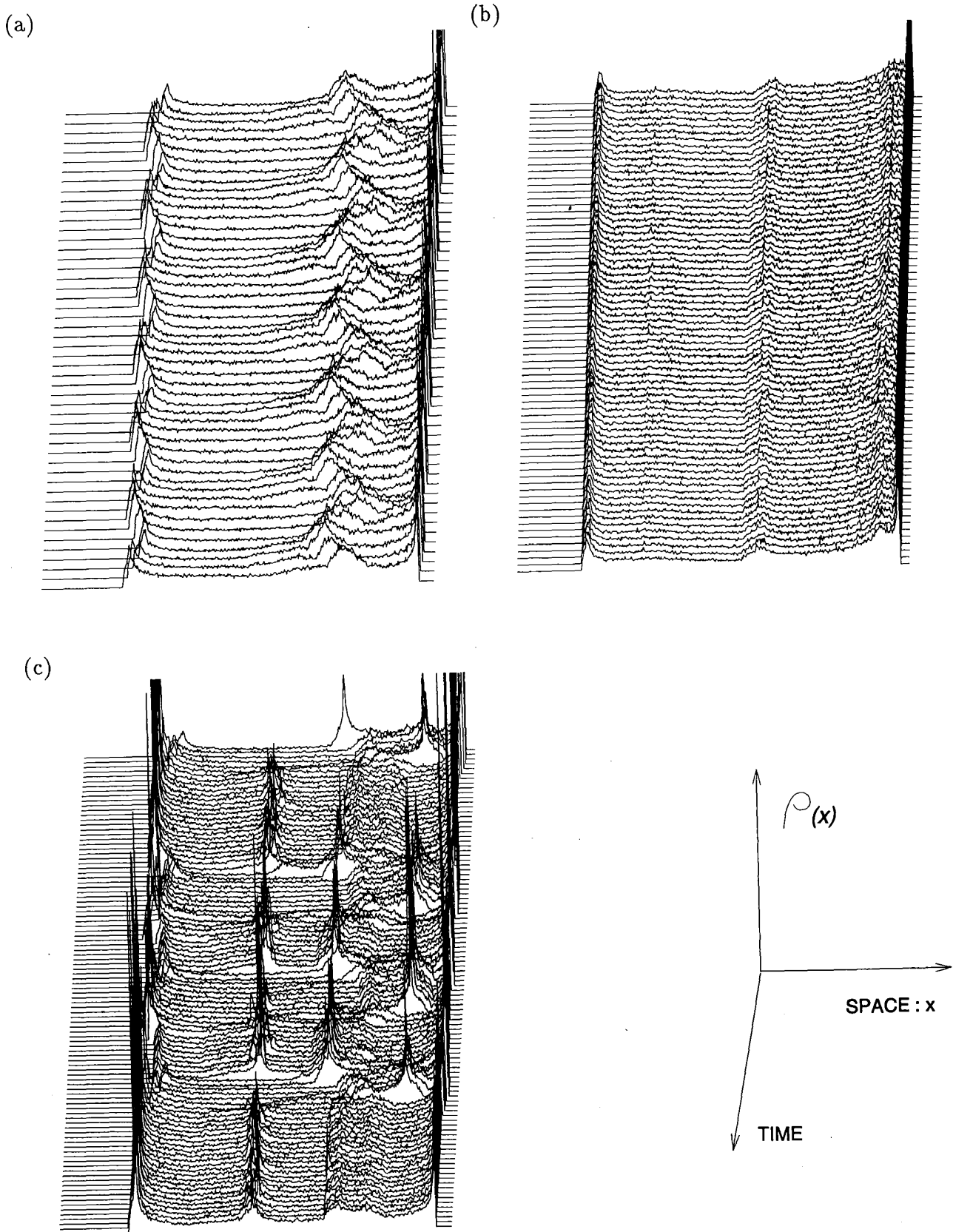


図 2.17. 分布関数の時間発展. (a)  $a_0 = 1.9, \Delta a = 0.05, \epsilon = 0.11$ . 時間方向へは 2 ステップおきにプロットした. (b)  $a_0 = 1.9, \Delta a = 0.05, \epsilon = 0.07$ . 時間方向へは 1 ステップおきにプロットした. (c)  $a_0 = 1.9, \Delta a = 0.05, \epsilon = 0.097$ . 時間方向へは 50 ステップおきにプロットした.

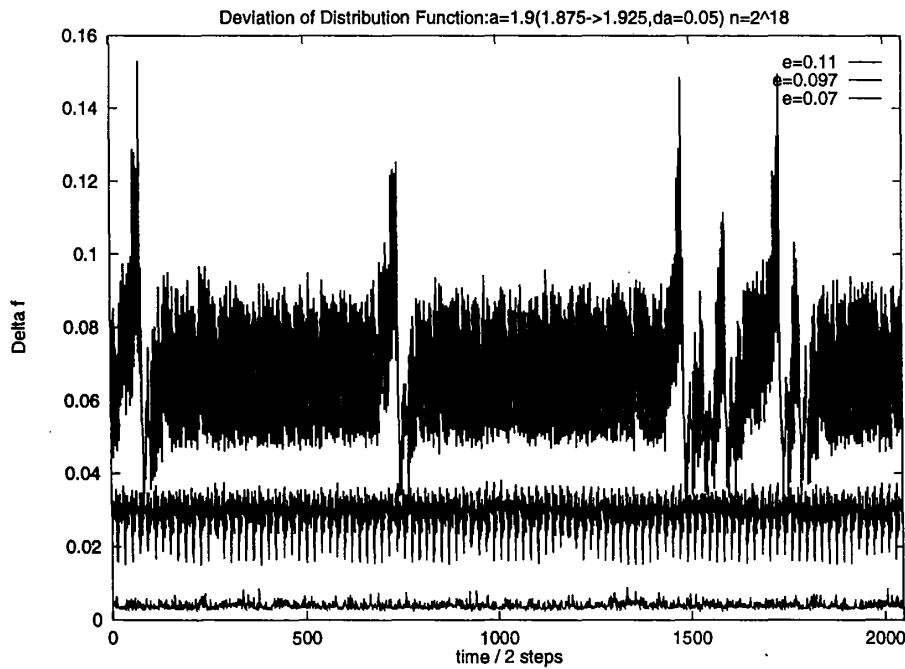


図 2.18. 分布関数の時間変化を関数空間での距離の変化としてプロットしたものである.  $\epsilon$  の値が変化している. (a)  $\epsilon = 0.11$ . (b)  $\epsilon = 0.07$  (c)  $\epsilon = 0.097$

$$\begin{pmatrix} \delta x_n(1) \\ \vdots \\ \delta x_n(N) \end{pmatrix} = \epsilon M_{n-1} \cdot M_{n-2} \cdots M_0 \begin{pmatrix} \delta h_0 \\ \vdots \\ \delta h_0 \end{pmatrix}.$$

しかし,  $\delta x_n$  は最大リャプノフ指数に対応するリャプノフベクトルに漸近する. 従って,  $\lambda_h \rightarrow 0$  は期待できず, 平均場の動力学を特徴付ける統計量とはならない. §2.3で平均場の運動は常にある有限の揺らぎが伴う事を見たが, 今のように  $\delta h_0 \rightarrow 0$  の極限での平均場の挙動を追うかぎり, この揺らぎに影響を受け, 指数は元々の系の高自由度カオスの最大リャプノフ指数に漸近してゆくだろう. このことは祖視化の問題と関係があり本章の最後に議論する.

## 2.6 分布関数のダイナミクス

我々はこれまで平均場の準周期運動を見て来たが, 系のリャプノフ・スペクトルの性質から, それが通常の力学系の意味での準周期運動とは違う事が示唆される. すなわち元々の系の変数に準周期に対応するモードは含まれていない. また前節で, システムサイズが有限である事に伴う揺らぎにより, 直接, 平均場の安定性・不安定性を見る試みは失敗の終わった.

そこで,  $N \rightarrow \infty$  の極限として  $x(i)$  の分布関数を考え, 平均場をその統計平均と考えてみよう.  $x(i)$  の分布関数を

$$\rho_n(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_n(i))$$

と定義すれば、平均場  $h_n$  は

$$h_n = \int x \rho_{n-1}(x) dx$$

と表される。

図 2.17 は 3 つの場合について分布関数の時間変化をプロットしたものである。また図 2.18 は分布関数の時間変化を関数空間での距離の変化としてプロットしたものである。横軸は時間で、縦軸  $D\rho_n$  は、

$$D\rho_n = \sqrt{\int_{-1}^1 \{\rho_{n+1}(x) - \rho_n(x)\}^2 dx}$$

である。一つずつ見ていくと、

- (a) は §2.3 で見た例に対応する分布関数の時間変化である。§2.3 で見たように平均場は準周期運動をしていた。それに対応して分布関数も準周期的な振動をしている (図 2.17(a))。図 2.18(a) もやはり準周期的な運動をしている。
- (b) は平均場が固定点と思われる場合の分布関数の時間変化である。図 2.17(b) では揺らぎ的な変化が残りながらも、分布関数はほぼ定常的である。一方図 2.18(b) では、(a) や (c) と比べても分布関数の変化が小さい事が分かる。
- 図 2.17(c) では分布関数は間欠的にその形を変化させている。一方図 2.18(c) では、(a) や (b) に比べて変位も大きく、また、間欠的にバーストが起こっている事が分かる。

以上から、平均場のダイナミクスが分布関数のダイナミクスの反映である事がわかる。従って、平均場の安定性や不安定性は分布関数の関数空間中での安定性や不安定性を反映すると考えられる。平均場の安定性を統計的に見積もる為には、その事が考慮されねばならないだろう。

先にも触れたように、分布関数のレベルで考えるというのは、システムサイズ  $N$  が無限大の極限で議論するという事に相当すると思われる。分布関数の安定性や不安定性と、元々の変数の安定性や不安定性 (元々の系でのリャプノフ・スペクトル) はどのような関係にあるのかも今後の課題である。

## 2.7 平均場における準周期運動の機構: 簡単なケースについて

### 2.7.1 要素の分岐の組織化

平均場に見られる集団運動の幾つかを見て来た。これらは要素の性質が均質な場合の大域結合系では見られなかった現象であり、性質にバラツキがある系の特徴であると言えるだろう。では、そのような協同現象が現われる機構は何であろうか。またその際、非線形の分布はどのような役割を果たしているのだろうか。

§2.4 で触れた平均場の周期状態から準周期状態に至る過程では (図 2.10)、以下に見るように、集団運動の起源と機構の理解が比較的容易である。パラメータの広い領域で見られる他の集団運動が全

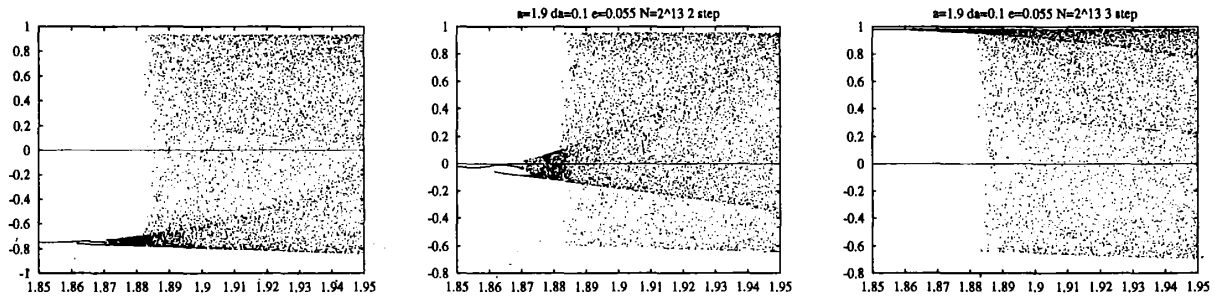


図 2.19. 平均場が 3 周期であるときの  $x_n(a)$  の引き続く 3 ステップのスナップショット. 横軸が非線形性  $a$  で, 縦軸がそれに対応する要素の値  $x(a)$ . 横軸は要素のインデックス  $i$  と考えてよい. 詳しくは本文参照.  $a_0 = 1.9$ ,  $\delta a = 0.1$ ,  $\epsilon = 0.055$ ,  $N = 2^{13}$ .

て同様の仕組みを持つかどうかは定かではないが, 以下では周期 3 から準周期に至る経路でみられる集団運動の機構について述べる.

我々の系では要素の性質にばらつきがある. 従って, 各要素の非線形パラメータの非一様性は個々の要素の動力学的の違いとなって現われるはずである. 時刻  $n$  でのシステムの状態は  $x_n(a)$  のように, 各要素のインデックス  $i$  の代りに各要素の非線形パラメータ  $a$  の関数として表すことが出来る. 図 2.19 はある時刻  $n$  での  $x_n(a)$  を表したものである. 横軸は非線形パラメータ  $a$  で縦軸はそれに対応する  $x(a)$  である. 注意しなければならないのは, 図 2.19 は普通よく見られる外部のコントロールパラメータに対する系のアトラクターの変化を描いた分岐ダイアグラムによく似ているが, 図は  $N$  個の要素からなる系の, ある一時刻  $n$  での系の状態のひとつの表現である, という点である.

とは言うものの, もしも, 図 2.19 を外部のコントロール・パラメータの変化に対するアトラクターの変化として見る事が出来るならば, “接線分岐 (tangent bifurcation)” や “周期倍化分岐 (period doubling bifurcation)” や “クライシス (crisis)” に似たような振舞いを見ることが出来る. そこで, 平均場を各要素にとっての外部パラメータと見做し, それぞれの要素を独立であるかのように見たとしよう. すると, それらの低次元分岐構造はそれぞれの要素に対して起こっていると考えることが出来る. すなわち, ある非線形性  $a$  に対応する要素がそれぞれ “接線分岐”, “周期倍化分岐”, “クライシス” 等を起こしている, と考えるのである.

もちろん, 我々の系では各要素は平均場を通じて相互作用をしており, また一方, 平均場は個々の要素のダイナミクスから構成されている. それ故に, 集団的な協同現象が現われたときは, それらが自家無撞着的 (self-consistent) に形成されている, と考えることが出来る. その際, 理解の鍵になるは, 高次元系の中で, ここで述べた低次元分岐構造の組織化である. 以下では個々の要素に対して “接線分岐”, “周期倍化分岐”, “クライシス” 等の低次元分岐の概念を用い, 高次元系での現象を説明していくことにする.

以下では, 平均場の動力学が周期にロックされた状態にある 2 つの例において系の構造を見る. 次にそれらを理解の助けとしながら, 平均場が準周期運動をしている場合についてその機構の理解を試みる.



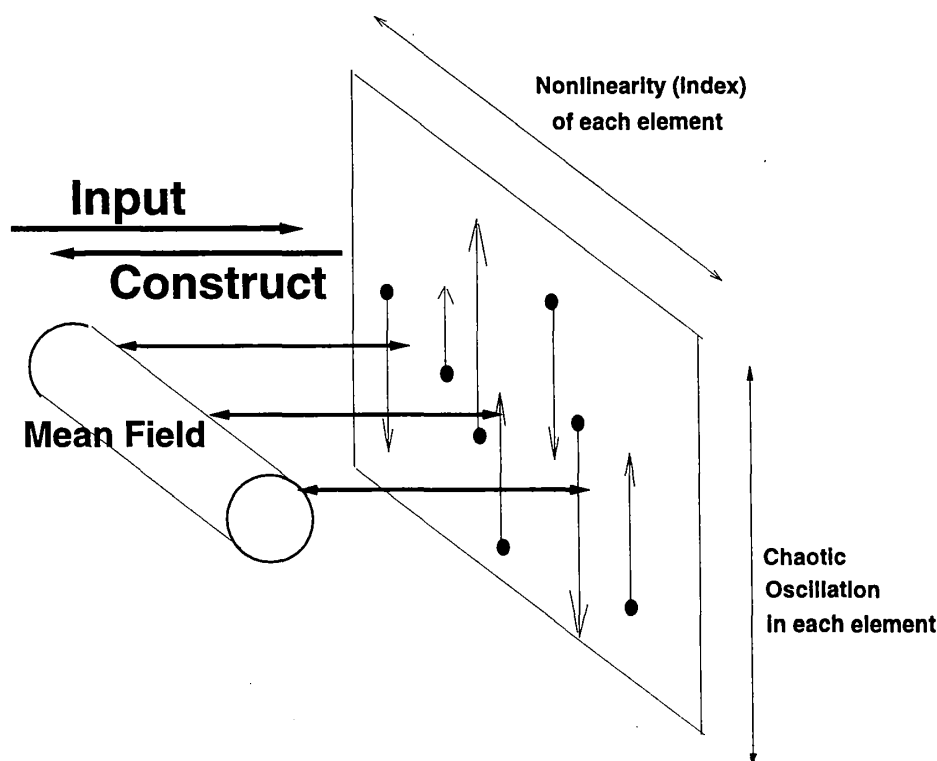


図 2.20. 平均場と各要素の動力学に関する模式図. 図 2.18 でプロットした各要素の動力学は平均場とのフィードバック機構を形成している.

### 2.7.2 平均場が周期 3 の運動, 1 つのクラスターとばらけた状態の共存

平均場が周期 3 にロッキングされている状態から始める. 図 2.19 は §2.4 で平均場が周期 3 にロッキングされている状態 (図 2.10(a)) の系のスナップショットを示したものである.

先に進む前に, もう一度, 図 2.19 の見方を説明する. 図 2.19 は要素  $i$  の時刻  $n$  での状態  $x_n(i)$  をプロットしてのものである. ただし, 要素により非線形パラメータ  $a$  は異なるので, それぞれの要素の非線形形成  $a(i)$  はインデックス  $i$  の代りになる. そこで, 図 2.19 では横軸を各要素の非線形パラメータ  $a$ , 縦軸をその要素に対応する  $x(a)$  をプロットしたもので, 時刻  $n$  でのスナップショットである.

図 2.19 では,  $a \approx 1.85$  で起こった接線分岐によって  $1.85 < a < 1.887$  の範囲にある要素は概ね同期して, 3 周期で振動をしている. そして,  $a$  が大きくなるにつれて同期した要素は周期倍分岐, そして, クライシスに至る. クライシス点を越えると要素は充分に発達したカオス状態になる. すなわち, ここでは同期した運動 (クラスター化運動) と完全にばらけた運動が共存している. この時の周期 3 の運動の起源は, 明らかに, Logistic Map における周期 3 の window である. そして以下で見るように, このような window 構造が高次元系における協同現象の理解において重要な役割を果たしている.

Logistic Map  $f(x) = 1 - ax^2$  において, 3 周期分岐の発生はその 3 回写像  $y = f(f(f(x)))$  の接線分岐によって理解される. この場合 3 回写像が  $y = x$  に接する点は 3 点である (図 2.21)(a). 一方我々の系で平均場を各要素に対する時間に依存した外部からの入力と見做そう. Logistic Map

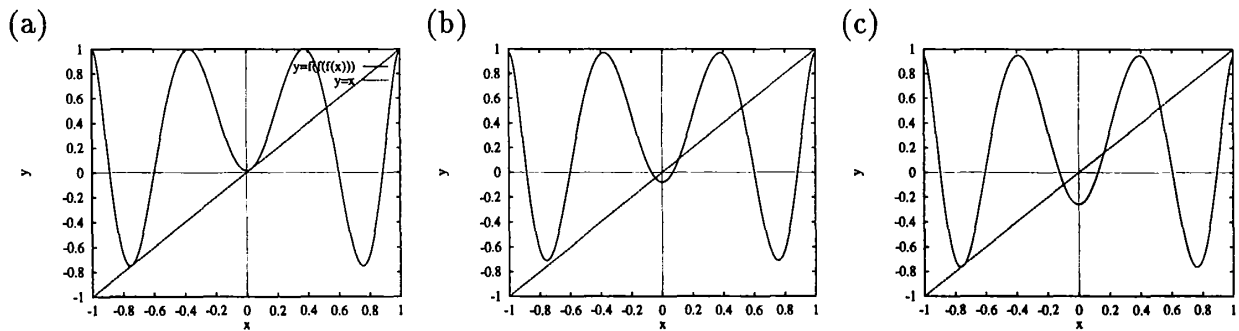


図 2.21. (a)  $y = f(f(f(x)))$  を描いたもの. 接線分岐が 3 点で同時に行っている.  
(b)  $y = f_{\delta 3}(f_{\delta 2}(f_{\delta 1}(x)))$  を描いたもの. 安定な点は 1 点. (c) 同じく安定な点は 2 点.

で時間に依存した外部入力がある場合, その動力学は写像

$$y = f_{\delta}(x) = 1 - ax^2 + \delta$$

に従うと考えられる. この場合,  $\delta$  にある種の制約がないならば,  $f_{\delta}(x)$  の 3 回写像  $f_{\delta 3}(f_{\delta 2}(f_{\delta 1}(x)))$  が接線分岐をするときは  $y = x$  に対して通常, 1 点で接する. また, その 1 点の位置は, 3 回写像における 3 つの  $\delta$  の組合せによって選択される (図 2.21(b)(c)).

再び図 2.19 にもどる. この図で接線分岐が 1 点でのみ起きているのは同様に理解できる. 今の場合, 平均場は 3 周期で振動している. 各要素は 3 値の平均場の組合せによって 1 点で分岐を起こすが, 分岐点は 3 周期性を持っている. 一方で平均場の 3 周期性はクラスター構造の 3 周期性を反映している. 従って, 自家無撞着的 (self-consistent) に構造が形成される.

ところで, 大域結合系における平均場の 3 周期振動は,  $\Delta a = 0$  の均質な系においても見られた (例えば  $a = 1.8, \epsilon = 0.01$ ). そこでは, 完全に同期した 3 つのクラスター状態で完全に 3 自由度系に縮退している. それ故, 系は要素間になんら不安定性を含んでおらず, 要素の自律性は失われていると見ることが出来る.

一方, 今の例 (図 2.19) では, 要素はある種の役割分担をしていると見ることが出来る. すなわち, ばらけた運動とクラスター化運動が共存している. 実際, 要素間が完全にばらけた状態の運動を取り除いてしまうと, 平均場の 3 周期振動は維持出来ない. また, 秩序状態と無秩序状態の共存はミクロにある種の安定性と不安定性を内包していることになり, それらが, 以下で見るような準周期運動等のマクロな秩序運動を生み出す原因となっていると見ることが出来る. これは, 非線形性が分布しており, 要素間にバラツキがあるための効果である.

### 2.7.3 平均場が周期 3 の運動, 2 つのクラスターとばらけたの状態の共存

図 2.22 は, 依然として平均場が 3 周期の運動をしている場合のある時刻での系の要素の状態を描いたものである. 先と事情が違う点は第 2 の接線分岐によって, もう一つのクラスター運動が形成されている点である.  $x = 1, a \approx 1.87$  付近での接線分岐によって第 1 のクラスター化運動が起こり,  $a \approx 1.92$  でクライシスを起こしている. そして, 第 2 の接線分岐が  $x = 0, a \approx 1.885$  で起きている

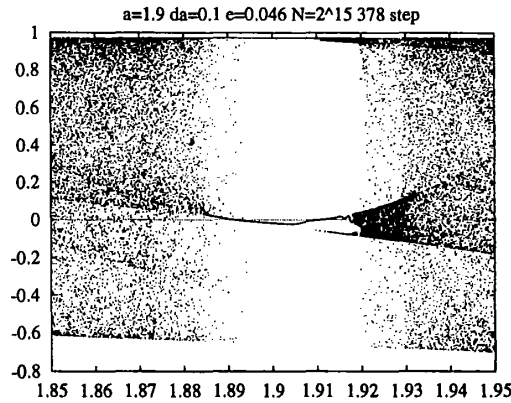


図 2.22. 平均場が3周期であるときの  $x_n(a)$  のスナップショット. クラスター化運動が2箇所で見られる.  $a_0 = 1.9$ ,  $\delta a = 0.1$ ,  $c = 0.046$ ,  $N = 2^{15}$ .

る. そこに, 第1のクラスター化運動のクライシスで不安定化した要素が引き込まれていっている. 更に第2のクラスター化運動も  $a \approx 1.932$  付近でクライシスを引き起こし, それを越えると要素は充分に発達したカオス振動を示している. ここでもクラスター化運動と要素間がバラバラの状態が共存している.

#### 2.7.4 平均場が準周期運動, 2つのクラスターとばらけた状態の共存:

次に平均場が準周期運動をしている場合の動力学について議論する. 図 2.23はその平均場振動が準周期になっている場合のある時刻での系の要素の状態を描いたものである. その時の平均場の動力学は§2.4で見た通り3周期に近い振動数を持つ(図 2.10(b)).

図 2.23(a)では前の例と同様に2つのクラスター運動と完全にバラバラの運動が共存している. 第1のクラスター化運動は  $a \approx 1.855$  付近の接線分岐によって形成される. それは,  $a \approx 1.917$  でクライシスを起こし, それを超えると要素はカオティックに振動しバラバラの状態になる. 一方, 第2のクラスター化運動は  $a \approx 1.92$  付近で起こった第2の接線分岐によって形成される. このクラスター運動は, 1番目のクラスター運動のクライシスでバラバラの状態になった要素を引き込んでいく. この例で形成された2つのクラスター運動は, 前の例のように安定ではない. そして, その不安定性が平均場の準周期運動を生み出している. 以下ではその様子を系の時間発展とともに追っていく. ところで, 前にも触れたようにこの状態は3周期に極めて近い振動数を示している. それを考慮に入れて, 系の時間発展を時刻  $3n$  での構造変化として捉えよう.

1. 図 2.23(b)では第1のクラスター運動の不安定化が進行している. 図 2.23(b)(c)から分かるように1番目のクラスター運動は非線形性の小さい要素から順に崩れて行く.
2. それと同時に2番目のクラスター運動が  $a$  の値の小さい領域に向かって(図では右に向かって)成長して行く(図 2.23(b)(c)(d)).
3. やがて, 1番目のクラスター運動は完全に崩壊することになるが(図 2.23(d)), この時  $x \approx 0$  付近に第3のクラスター運動の形成が始まっている.

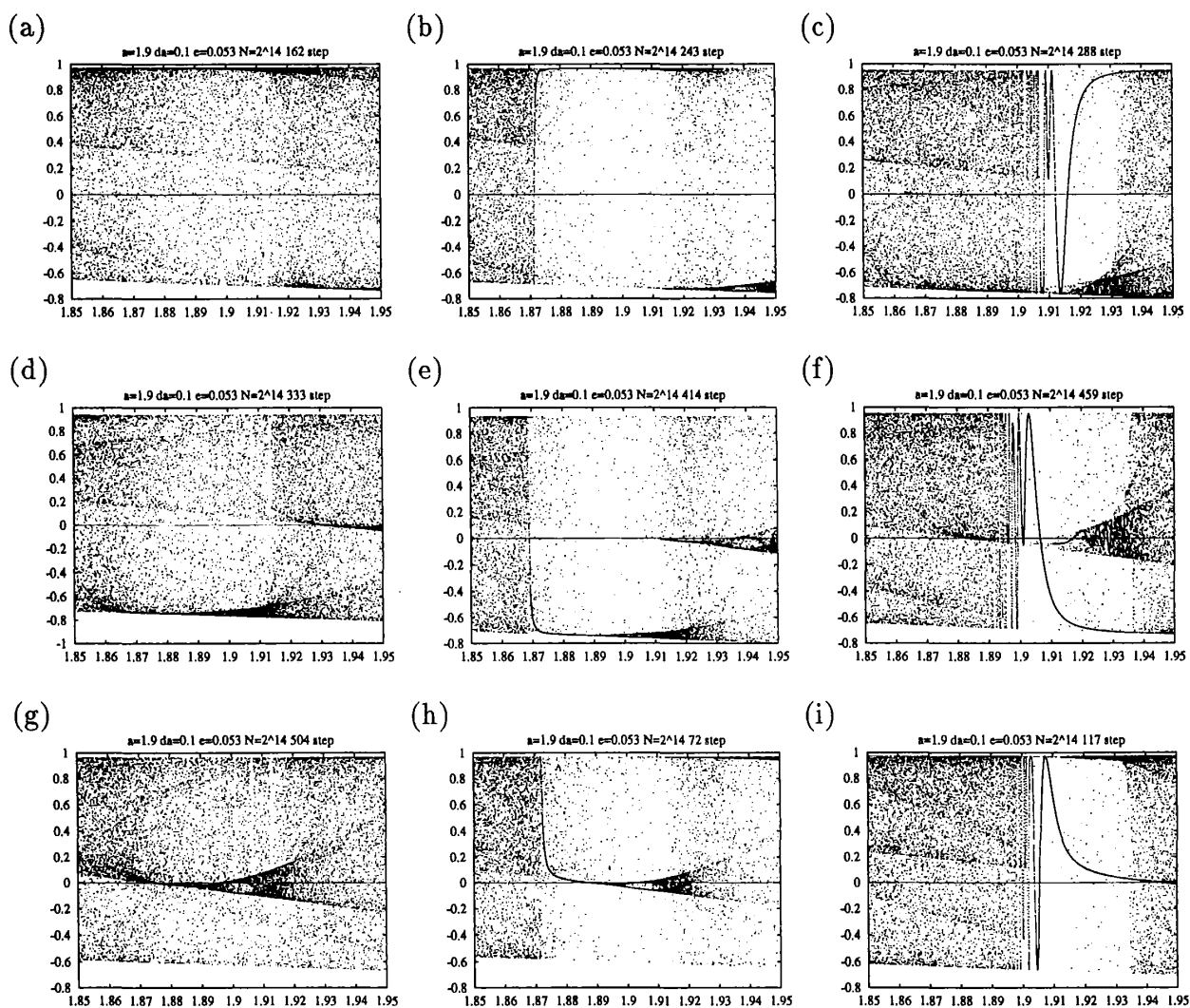


図 2.23. 平均場が準周期であるときの  $x_n(a)$  の引き続くのスナップショット. 横軸が非線形性  $a$  で, 縦軸がそれに対応する要素の値  $x(a)$ . (a)→(c)→(d)→(f)→(g)→(i)→(a) のように横方向に見れば  $3n$  ステップでの変化. 縦方向で見れば  $3n$ ,  $3n+1$ ,  $3n+2$  ステップの変化として見る事が出来る. (a)→(b) の間は 81 ステップ, (b)→(c) は 45 ステップ, (c)→(d) は 45 ステップ. 以下同じ. 詳しくは本文参照.  $a_0 = 1.9$ ,  $\delta a = 0.1$ ,  $\epsilon = 0.053$ ,  $N = 2^{13}$ .

この、クラスター運動の崩壊と形成の過程は約 170 ステップで進む。(図 2.23 で (a)→(d) が約 170 ステップ)

次の 170 ステップは、同様の過程が

- $x \approx -0.7$  付近のクラスターを 1 番目,
- $x \approx 0$  付近のクラスターを 2 番目,
- $x \approx 1$  付近のクラスターを 3 番目として繰り返される

(図 2.23(d)→(g)). そして, その次 170 ステップは,

- $x \approx 0$  付近のクラスターが 1 番目,
- $x \approx 1$  付近のクラスターが 2 番目,
- $x \approx -0.7$  付近のクラスターが 3 番目となる

$3n \text{ step} :$	$\rightarrow \{c_+, c_-, c_0\}$	$\xrightarrow{170 \text{ steps}}$	$\{c_-, c_0, c_+\}$	$\rightarrow$
	$\downarrow$		$\downarrow$	
$3n + 1 \text{ step} :$	$\rightarrow \{c_-, c_0, c_+\}$	$\rightarrow$	$\{c_0, c_+, c_-\}$	$\rightarrow$
	$\downarrow$		$\downarrow$	
$3n + 2 \text{ step} :$	$\rightarrow \{c_0, c_+, c_-\}$	$\rightarrow$	$\{c_+, c_-, c_0\}$	$\rightarrow$
	$\rightarrow$	$\{c_0, c_+, c_-\}$	$\rightarrow$	$\{c_+, c_-, c_0\} \rightarrow$
		$\downarrow$		$\downarrow$
	$\rightarrow$	$\{c_+, c_-, c_0\}$	$\rightarrow$	$\{c_+, c_-, c_0\} \rightarrow$
		$\downarrow$		$\downarrow$
	$\rightarrow$	$\{c_+, c_-, c_0\}$	$\rightarrow$	$\{c_-, c_0, c_+\} \rightarrow$

Table 2.1. システムの状態の遷移の様子

(図 2.23(g)→(i)).

そこで,

- $x \approx 1$  に形成されるクラスターを  $c_+$ ,
- $x \approx -0.7$  に形成されるクラスターを  $c_-$ ,
- $x \approx 0$  に形成されるクラスターを  $c_0$ ,

として, 各段階 (各 170 ステップで起こる過程) を {1 番目のクラスターの崩壊, 2 番目のクラスター成長, 3 番目のクラスターの生成} のように表せば, システムは

$$\cdots \rightarrow \{c_+, c_-, c_0\} \xrightarrow{170 \text{ steps}} \{c_-, c_0, c_+\} \rightarrow \{c_0, c_+, c_-\} \rightarrow \{c_+, c_-, c_0\} \rightarrow \cdots$$

のように移っていく. 一方今は,  $3n$  ステップの構造を眺めたが, 同様の過程は  $3n + 1$ ,  $3n + 2$  においても起こっている. 3 周期で  $\{c_+, c_-, c_0\} \rightarrow \{c_-, c_0, c_+\} \rightarrow \{c_0, c_+, c_-\}$  と移るから, まとめるとシステムは表 2.1 のように推移して行く.

以上から, この 3 つのクラスター化運動の生成崩壊の繰り返しが平均場における準周期運動の起源であるということがわかる. では, なぜクラスター運動の生成崩壊が繰り返されるのか.

### 2.7.5 クラスター化運動の生成崩壊機構

上で述べた, 3 つのクラスター化運動の生成崩壊の繰り返しの機構を説明する前に各クラスター化運動の安定性・不安定性に関して若干の準備をしておく. これまでと同じように, 各々の要素に

とって平均場を外部からのパラメータと見なせば、各々の要素の動力学は、

$$F_h(x) = (1 - \epsilon)(1 - ax^2) + \epsilon h$$

のように表せる。そこで、平均場の時間変化による  $y = F_h(x)$  の 3 回写像

$$x_n = F_{h_{n-1}}(F_{h_{n-2}}(F_{h_{n-3}}(x))) \quad (2.6)$$

の分岐構造の変化として要素の動力学を捉えることができる、式 (2.6) は一つの極大値と二つの極小値を持ち、大雑把に言ってこの 3 値の極値が 3 つのクラスター運動の安定性・不安定性に関係している<sup>i</sup>。  $c_-, c_0, c_+$  の各クラスター運動に関係する時刻  $n$  での極大・極小点を小さい方から  $x_{-,n}, x_{0,n}, x_{+,n}$  とする。また、これらの点に対応する時刻  $n$  の極値を  $G_{-,n}, G_{0,n}, G_{+,n}$  とする。それらは以下のようになる。

$$\begin{aligned} G_{-,n} &= F_{h_{n-1}}(F_{h_{n-2}}(F_{h_{n-3}}(x_-))) \\ &= 1 - \epsilon + \epsilon h_{n-1} - (1 - \epsilon)a(1 - \epsilon + \epsilon h_{n-2})^2 \\ G_{0,n} &= F_{h_{n-1}}(F_{h_{n-2}}(F_{h_{n-3}}(x_0))) \\ &= 1 - \epsilon + \epsilon h_{n-1} - (1 - \epsilon)a \left\{ 1 - \epsilon + \epsilon h_{n-2} - (1 - \epsilon)a(1 - \epsilon + \epsilon h_{n-3})^2 \right\}^2 \\ G_{+,n} &= F_{h_{n-1}}(F_{h_{n-2}}(F_{h_{n-3}}(x_+))) \\ &= 1 - \epsilon + \epsilon h_{n-1} \end{aligned}$$

各クラスターの安定条件は概ね  $G_{-,n} \leq x_{-,n}$ ,  $G_{0,n} \leq x_{0,n}$ ,  $G_{+,n} \geq x_{+,n}$  と考えてよいであろう (図 2.24)。簡単な計算からそれらはそれぞれ以下のようになる。

$$1 - \epsilon + \epsilon h_{n-3} - (1 - \epsilon)a \left\{ 1 - \epsilon + \epsilon h_{n-1} - (1 - \epsilon)a(1 - \epsilon + \epsilon h_{n-2})^2 \right\}^2 \leq 0, \quad (2.7)$$

$$1 - \epsilon + \epsilon h_{n-1} - (1 - \epsilon)a \left\{ 1 - \epsilon + \epsilon h_{n-2} - (1 - \epsilon)a(1 - \epsilon + \epsilon h_{n-3})^2 \right\}^2 \leq 0, \quad (2.8)$$

$$1 - \epsilon + \epsilon h_{n-2} - (1 - \epsilon)a \left\{ 1 - \epsilon + \epsilon h_{n-3} - (1 - \epsilon)a(1 - \epsilon + \epsilon h_{n-1})^2 \right\}^2 \leq 0. \quad (2.9)$$

これらから、今の場合  $a \approx 1.9$ ,  $\epsilon \approx 0.05$  等を考え合わせると、時刻  $n$  での  $c_-, c_0, c_+$  各クラスター運動の安定性・不安定性はそれぞれ主に  $h_{n-2}, h_{n-3}, h_{n-1}$  に依存していることが分かる。すなわち、それぞれ  $h_{n-2}, h_{n-3}, h_{n-1}$  の値が大きくなり、上の式の左辺の値が 0 を下回れば各クラスター運動は安定化する。一方、それぞれ  $h_{n-2}, h_{n-3}, h_{n-1}$  の値が小さくなれば、それぞれに対応する各クラスター運動は不安定化する (表 2.2)。ただし、各クラスターの安定性は独立ではなく、1 回の写像で移る事ができる。従って、1 つの事態を 3 様に見ていると考える必要がある。

このように各クラスターの安定性・不安定性を議論するためには時刻  $n$  での  $h_{n-1}, h_{n-2}, h_{n-3}$  値を知らねばならない。一方、モデル (2.1) では以下の関係がある。

$$h_{n-1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(x_{n-1}(i)) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_n(i).$$

<sup>i</sup> もちろん、接線分岐点を正確に議論しようとするならば、式 (2.6) と  $y = x$  の接点を考えなければならない。しかし、上のように極値を議論すれば定性的理解においては十分であろう。

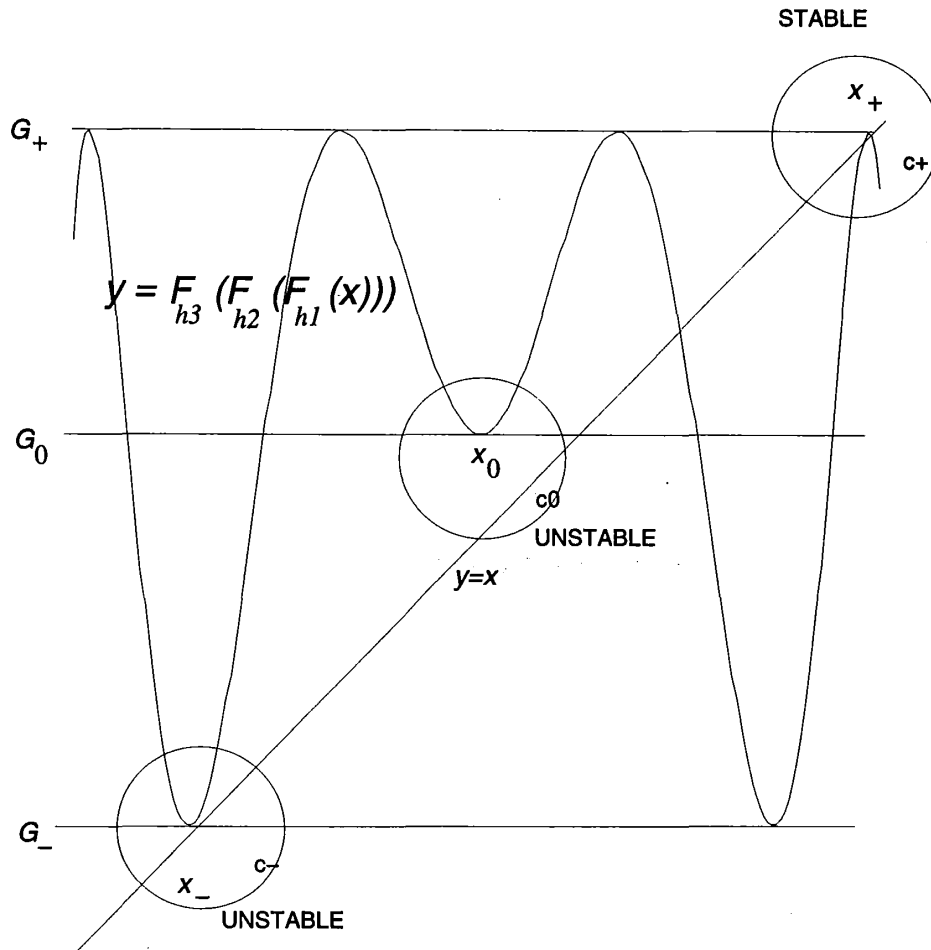


図 2.24.  $y = F_{h_{n-1}}(F_{h_{n-2}}(F_{h_{n-3}}(x)))$  と 3 つの極値の関係をプロットしたもの.  $x_-, x_0, x_+$  における  $F_{h_{n-1}}(F_{h_{n-2}}(F_{h_{n-3}}(x)))$  の値は 3 つの極値  $G_-, G_0, G_+$  である. それぞれ, 安定化の為に  $G_{-,n} \leq x_{-,n}$ ,  $G_{0,n} \leq x_{0,n}$ ,  $G_{+,n} \geq x_{+,n}$  であればよい. この図の場合  $c_+$  だけ安定化している.

従ってそれらの代りに  $x_n(a), x_{n-1}(a), x_{n-2}(a)$  の分布を議論すればよい. また, そこから平均場の値を知ることにも出来る.

そこで, 3 つのクラスター運動の生成消滅の繰り返しと平均場の値の変化, あるいは同じことであるが  $x(a)$  分布の変化, これらの関係を通じて準周期運動の起源と機構を理解しよう.

- $c_+$  クラスターの崩壊

まず, システムが図 2.23(a) の状態にある, 時刻  $3n$  から始める. 図 2.23(a) では  $a \approx 1.917$  付

	$c_-$ -cluster	$c_0$ -cluster	$c_+$ -cluster
安定化	$h_{n-2} \uparrow$	$h_{n-3} \uparrow$	$h_{n-1} \uparrow$
不安定化	$h_{n-2} \downarrow$	$h_{n-3} \downarrow$	$h_{n-1} \downarrow$

Table 2.2. 時刻  $n$  での各クラスター運動の平均場依存性: ただし各クラスター運動は独立ではなく, 一つの事象の 3 面である.

近の  $c_+$  クラスター運動のクライシスにより不安定化した要素が  $x \approx -0.7$  の  $c_-$  クラスター運動に吸収されていく。そして、要素の吸収が進むにつれて平均場の値  $h_{3n-1}$  は低下していく。これは、式 (2.6) においては極値  $G_{+,3n}$  の低下となって現われ、表 2.2 から分かる通り、時刻  $3n$  における  $c_+$  クラスター運動の安定性に影響を及ぼす。

もしもこの時  $h_{3n-1}$  の低下によっても  $c_+$  クラスター運動の安定性の条件 (2.9) を満たしているならば、そして、他の不安定化の要因が存在しないならば、系は周期 3 の状態にロックされるであろう。前の 2 つの例 (§2.7.2, §2.7.3) はこれに相当すると考えてよい。

一方、もしも  $h_{3n-1}$  の低下が  $c_+$  クラスター運動の安定性の条件 (2.9) を破るならば  $a$  の小さい方から  $c_+$  クラスター運動が順に不安定化していく。これは、式 (2.6) においては、 $x \approx 1$  での接線分岐点が  $a$  の大きい方へ遷移していくことを表す。また、同じ事であるが、安定性の条件 (2.9) を満たす  $a$  領域が  $a$  のより大きな方へ移動していくことを表している。すなわち、図 2.23(b)(c) は接線分岐点の移動が見えているということが出来る。

この過程の後の  $c_+$  クラスター運動の崩壊は平均場の値  $h_{3n-1}$  の低下の加速を意味している (この 2 つの事象は因果関係というよりもむしろ現象の裏表であると考えた方がよい)。

#### ● $c_-$ クラスターの成長

さて、この時、時刻  $3n-1$  で起こっている現象を眺めてみよう。時刻  $3n-1$  では表 2.1 で見たようにまず始めに  $c_0$  クラスターのクライシスによってカオティックになった要素を  $c_+$  クラスター運動が吸収する。その後  $c_0$  クラスター運動の崩壊が始まり、 $c_+$  クラスター運動が成長してくる (図 2.23(g)→(i))。この過程で平均場の値  $h_{3n-2}$  の値は上昇していく。

このことは、式 (2.6) においては時刻  $3n$  における極値  $G_{-,3n}$  の低下となって現われる。これは、表 2.2 から分かる通り、時刻  $3n$  における  $c_-$  クラスター運動の安定性に影響を及ぼす。 $h_{3n-2}$  の上昇によって  $c_-$  クラスター運動の安定領域は  $a$  の大きい方から小さい方へ向かって順に広がっていく (式 (2.8) 参照)。そして、 $c_-$  クラスター運動は  $c_+$  クラスター運動の崩壊によって不安定化した要素を引き込み成長していく (図 2.23(c))。この成長過程は平均場の値  $h_{3n-1}$  の低下をますます加速することになる。

#### ● $c_0$ クラスターの生成

完全に  $c_+$  クラスター運動が崩壊した後の  $c_0$  クラスター運動の生成について議論するために、最後に時刻  $3n-2$  で起こっている現象を眺めてみよう。時刻  $3n-2$  では始め  $c_-$  クラスター運動のクライシスによってカオス化した要素が  $c_0$  クラスター運動に吸収されていく。(図 2.23(d))。この過程で平均場の値  $h_{3n-3}$  は減少していく。しかし、その後の  $c_-$  クラスター運動の崩壊と  $c_0$  クラスター運動の成長によって  $h_{3n-3}$  は増加する。(図 2.23(e)(f))。これは時刻  $3n$  で、極値  $G_{0,3n}$  の低下となって現われ、表 2.2 から分かる通り、時刻  $3n$  における  $c_0$  クラ



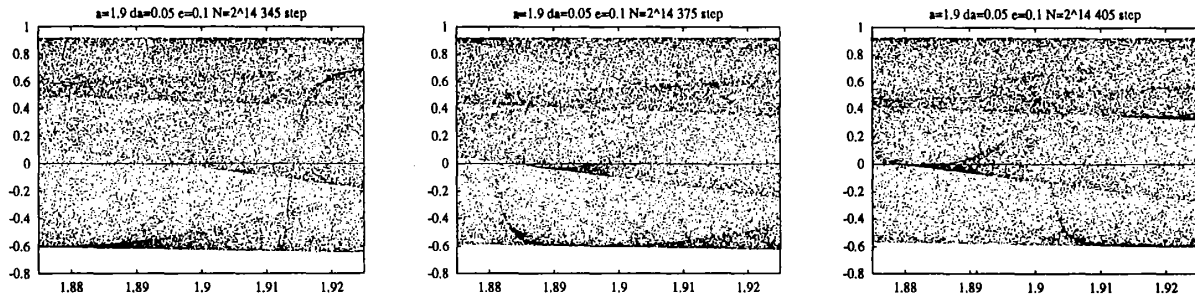


図 2.25. クラスターの運動が見える場合の  $x_n(a)$  プロット.  $a_0 = 1.9, \delta a = 0.05, \epsilon = 0.1, N = 2^{16}$ .

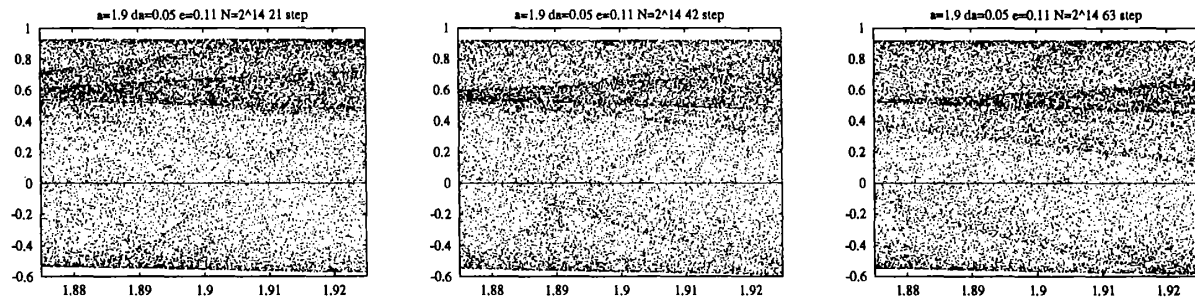


図 2.26. 明らかなクラスターの運動が見えない場合の  $x_n(a)$  プロット.  $a_0 = 1.9, \delta a = 0.05, \epsilon = 0.11, N = 2^{16}$ .

スター運動が  $a$  の大きい方から安定化を始める (式 (2.9) 参照).

以上の過程が約 170 ステップで起こるクラスターの生成崩壊過程の機構である. 上では時刻  $3n$  での遷移を見てきたが, 同時に時刻  $3n-1, 3n-2$  での過程も見た. また時刻  $3n-1, 3n-2$  での過程は,  $3n$  に引き続いて起こる過程と同等であり, 全過程の説明はこれで尽きていることになる.

このように, 平均場における準周期運動は平均場と各要素の間にフィードバック機構が生成されることによって起こっていることがわかった. その際, 秩序だったクラスター化運動と要素間がばらばらの状態の共存がマクロな運動の源になっている. そして, 幾つかの運動形態の共存によって非線形性の分布が重要な役割を果たしているのは明らかである.

ところで, ここでは 1 つのケースについて, そこでの準周期運動の機構を見てきたが, 他の準周期運動でも同様の機構が成り立つのだろうか.

図 2.25 は他のパラメータにおける  $x(a)$  の分布の変化である. ここでは, クラスター化運動と言えるような状態の運動形態は存在していないが, 分布に偏りがあり密度の高い所が存在する. 図 2.25 ではその密度の高い所が生成崩壊を繰り返している. そこには本節で述べたような個々の要素と平均場の間のフィードバック機構が生成されていると考えられる. そして, これらが準周期運動の起源であると考えられる.

しかし, 一般には準周期運動の機構は複雑であろう. また, 一見して分布の偏りの生成崩壊の機構が見られない場合もある. 例えば図 2.26 は §2.3 で見た準周期運動 (図 2.5 等) における  $x(a)$  の変化である. 分布密度の変化が見られるが本節で述べた準周期運動の機構から理解できるかは不明である. また, この違いは以下に見るようにそれぞれのリャプノフ・スペクトルの違いとなって現われている

る。

§2.5では準周期運動の一例(図 2.3, 図 2.5等)について, リャプノフ・スペクトルに 0 が無いことを見た。しかし, 本章での例 (§2.7.4, §2.7.5) においてはリャプノフ・スペクトルに負のモードが存在する。これは, 図 2.23に見られる, クラスター化運動によると思われる。

我々はしばしば力学系の分類としてリャプノフ・スペクトルの違いに注目して来た。ならば, 上の 2 つの準周期運動は違うクラスの動力学であろうか。一方, 2 つが本章で説明した機構を共通なものとして持つならば, このことと, リャプノフ・スペクトルの違いはどのように合入れるのであろうか。

我々はひとまず以下のように説明を与えておく。本章の例(図 2.10(b), 図 2.23)においてはある一定期間保たれるクラスター化運動が存在するためにリャプノフ・スペクトルに負のモードが現われる。その際のクラスター化運動は各々の要素が一定期間, 周期軌道に入ることによって実現されている。一方, §2.3 で考えた例(図 2.3, 図 2.5等)では各々の要素の運動は十分にカオティックで, クラスター化運動は存在しない。しかし, 軌道の分布に偏りがあって(周期軌道のなごり), それが平均場の準周期運動にとって重要な役割をしているであろう。

## 2.8 まとめ

### 2.8.1 まとめ

本章ではカオス振動を示す要素の大域結合系について, その乱流相で新たに見出された集団的な運動について報告した。系の状態は発達した高自由度カオスの状態であり, 要素の振動は同期の傾向を持たないが, 平均場というマクロな変数を導入するとそれは準周期運動( $T^2$  トーラス)を示していることが見出された。平均場の時系列に対する様々な解析も, それが明らかな  $T^2$  トーラス面上の準周期運動であることを示した。そして, 元々の高自由度性はトーラス面の周りの揺らぎとして現れていた。また, 平均場の構造に関する他の多くの例は, トーラス  $\rightarrow$  倍加トーラス  $\rightarrow$  周期ロッキング  $\rightarrow \dots$  のような, 低自由度カオスへの遷移の途上で見られるのと同様な構造を示した。そこから, 平均場の運動の中に低自由度性カオス(集団性カオス)が存在することが示唆された。

また, 系のリャプノフ・スペクトルは平均場の低自由度運動を反映しない可能性があることを見た。しかし, 平均場は明らかな準周期運動を示しており, これに対して現象論的なアプローチを取るならば, そのリャプノフ指数は 0 を示すはずである。したがって, 元の系のリャプノフ・スペクトルと平均場に見られる集団運動のリャプノフ指数の間の架け橋を模索する必要がある。そのための手掛かりを幾つか示した。

一方, 集団運動の機構が比較的簡単な場合について示した。そこでは, 各要素の力学系的分岐が動的に変化しながら, 全体としてオーガナイズされて, 集団運動が実現されていた。そこでは, 平均場に見られる集団的運動と個々の要素の動力学の間にフィードバック機構が生成されていた。ただし, この機構が他のパラメータで見られる集団運動に単純に敷衍できるかどうかは検討の余地がある。

## 2.8.2 課題

研究は途上であり、幾つかの問題点を残している。

- 元々のモデル (2.1) のリャプノフ・スペクトルに 0 が無いことと、平均場の運動が準周期的であることが両立し得る事を何らかの形で示す必要がある。
- 平均場の運動の安定性について

### ー 平均場の運動を端的に特徴付ける方法はないか

我々の系で得た平均場の準周期的時系列を実験によって得られたデータであると考えよう。その時系列の性質を調べるための方法として我々は 2 つの選択肢を持つ。一つは様々に開発されている時系列解析の方法を用いる。もう一つは現象論的なモデル方程式を構築する。

系の性質をリャプノフ指数によって特徴付けることを目標としたとすると、2 つのアプローチからはリャプノフ指数は 0 となり、時系列は 2 次元トーラス上の運動であると結論されるだろう。

### ー 平均場のダイナミクスと元々の系のダイナミクスの関係に関して。

一方、我々は系の方程式を知っているという意味で、系を支配するミクロな法則を完全に知っている。しかし、ミクロな性質を反映する統計量には平均場の性質が反映されていないことも合わせてみた。従って課題はミクロなダイナミクスとマクロな統計量 (上で述べた平均場のリャプノフ指数) の関係を探ることである。

### ー ミクロからマクロへの粗視化の問題

ミクロなダイナミクスから平均場の安定性を計量することを考えよう。これは粗視化の問題に関係してくる。平均場の時系列がどれほどシャープなトーラス面上の運動であったとしてもそれには常に揺らぎが伴う。これは、そもそもの系が有限のシステムサイズであることと関係している。それはまた、準周期運動を調べるために現象論的に構築したモデルにはない問題である。

われわれは、相関次元の解析でその次元がシステムサイズの増大とともに 1 に漸近して行くことを見た。しかし、あるクロスオーバーサイズを越えると急速に次元を上げる。それは、粗視化の程度で 1 次元系に見えるが、ミクロスコピックな領域では元々の系の大自由度性が現れて来る。

従って、ミクロなダイナミクスとマクロなそれをつなぐためには粗視化の程度  $\delta h$ , 無限系  $N$ , 時間  $t$  の 3 つの量がある関係に保ちながらその熱力学極限を考える操作が必要である。

従って我々はその系統だった方法を開発する必要がある。

- 平均場における集団的カオスの存在について。

- － 集団的カオスは存在するか

今の所、平均場の運動に関して明確に言えるのは準周期運動の存在だけである。 $N \rightarrow \infty$ で平均場が固定点である場合や、低自由度の集団的カオスである場合が存在するか否かは課題である。

- － なぜ簡単に見えないか。

低自由度系で良く知られた、カオスへ至る分岐構造はパラメータの広い範囲で見えているのに、低自由度性の集団的なカオスの存在を明瞭に示す証拠はない。これはなぜか。

- － 低自由度カオスと揺らぎの問題について

スケールを小さくしていくと大自由度性が見えてしまう事と、(低自由度)カオスにおいては無限の微細構造が必要である事は両立するか。これは有限システムにおけるカオスの問題とも関係してくる。

- 集団運動の発生機構に関して。

- － 他のパラメータでの準周期運動との関係

$\Delta a > 0$ の場合に集団運動が見えやすい、というのは§2.7では、分岐構造の動的变化が $a$ の値に依るために、それが集団的運動の起こり易さにつながっている事を見た。その機構も含めてこれは他のパラメータ領域に対してどこまで敷衍できるか。

- － リャプノフ・スペクトルとの関係について

平均場が同じように準周期運動をしても、リャプノフ・スペクトルの性質が異なる場合があった。我々はしばしばリャプノフ指数の性質の違いによって系の動力学を分類して来たが、もしも§2.7で説明した準周期運動の機構が他のパラメータでの準周期運動と共通であるとする、そのこととリャプノフ指数の性質の違いはどのように両立するか。

### 3. 運動カオス多体系における協同現象

#### 3.1 序

生体を多くの細胞が集まってできている細胞多体系と見なし、生体としての構造発生や機能的秩序をそのダイナミクスから理解しようという試みは多い。それは、細胞をアクティブな要素と考えて要素が互いに連関を持ちながら動くことで生物が活動をできるという見方であり、また、その視点を積極的に自らの研究の中に取り入れることである。この時に問題になるのはそうした単位細胞の活動能力をはるかに超えた生物体としての機能や形態がどのように生成され、維持されるかに答える事である。

しかし、個々の要素やそれが構成する集団の“ダイナミクス(運動)”とそれが生体として在るための“機能”の間には大きな距離がある。

物理学では機能の問題はひとまず置いて、単位要素がアクティブな要素であると仮定して、それが互いに作用を及ぼしながら集団を形成している時にどのような現象が見られるかを簡単な数理モデルを用いて研究がなされて来た。そして、そこでの結果を抽象的なレベルで現象の理解のための装置として採用してきた。

これまでに蓄積されて来た研究の多くは空間中に固定された動的な要素が隣接する他の要素と相互作用をする系や(局所結合系)、系を構成する他の全ての要素と相互に作用を及ぼし合う系(大域結合系)が中心であった<sup>1</sup>。それらは、多数の活動的な要素が集まる事で初めて現れる現象を問題にするという点で様々な問題に新たな視点を提供してきたと思われるが、しかし、それでもモデルは過度に簡略化されている。

例えば以下の問題に対してどのように接近するか。粘菌が単細胞として移動しながら集合しやがて統一体を形成する場合を考えると、相互に作用をおよぼし合う細胞は時間とともに変化してゆくはずである。この場合の要素である細胞は相互作用をする他の細胞を時間とともに変化させていく。また、脳は多くのニューロン細胞から成っているが、細胞間の結合の強さを動的に変化させていることで機能していると見る事もできる。また、蟻の群れや、鳥の群れなど運動は要素の離散性は高いが、単に集まっているだけではなく、要素間が相互作用をしていることで成り立っていると思われる。

上に挙げた幾つかの例では、空間の格子上に固定された要素が局所的に相互作用をする系や大域的結合系等のモデルでは考える事はできない。そこで、以下のように問題を立ててみたい。“内部動力

---

<sup>1</sup>われわれはその例を2章で見た

学を持つアクティブな要素が他の多数の要素と相互作用をしている。その時、直接相互作用をしている相手(結合構造)が動的に変化していく系を考える。そのような系に特徴的な動力学は如何なるものか”。

本章では特にカオス写像結合系の文脈の中で、個々の要素の動力学がカオスである場合について考える。

### 3.2 モデル

これまで、大自由度系力学系の研究としては大きく分けて2つのタイプが調べられて来た、

一つは“局所的(拡散的)結合系”でありもう一つは“大域結合系”である。これらはいずれもそれぞれの要素は局所ダイナミクスを持ち、そして、それらの間で相互作用をしている。“局所的結合系”は空間中に配列された振動的な要素が近接要素と結合している。代表的な系としては反応拡散方程式系や、Coupled Map Lattice(CML)が挙げられる。とりわけ、個々の要素の局所(内部)動力学がカオスであり、それらの要素が格子上に配置され近接要素と相互作用する CML は時空カオスの抽象的なモデルとして提案され、様々な側面から研究されてきた。簡単なモデルは以下のように与えられる [21]。

$$x_{n+1}(i) = f(x_n(i)) + \epsilon \left\{ \frac{f(x_n(i+1)) + f(x_n(i-1)))}{2} - f(x_n(i)) \right\}, \quad (3.1)$$

ここで、 $n$  は離散時間で、 $i$  は要素のある格子上のインデックス。各要素の内部動力学は Logistic Map  $f(x) = 1 - ax^2$  を採用する。一方、大域結合系としては反応拡散方程式や CML に対応して、大域結合振動子系や Globally Coupled Map(GCM) などが挙げられる。GCM では要素が全結合している系で簡単なシステムは以下のように与えられる。

$$x_{n+1}(i) = f(x_n(i)) + \epsilon \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x_n(j)) - f(x_n(i)) \right\}, \quad (3.2)$$

ここで  $n$  は離散時間で  $i$  は要素のインデックス、 $N$  はシステムサイズである。GCM は CML において要素間の相互作用の距離が無限の極限まで延びたものと考えられる。

ここで触れてきた要素結合系では自ら振動する要素が空間中に固定されている。また、要素間の結合の構造は決して変化しない。つまり、結合した要素は常に相互作用をし、結合していない要素は決して相互作用をすることがない。また、多くの例では要素間の結合の強さも変化しない。

本章では要素間の相対的な結合が時間とともに変化し得る系について考える。とくに、振動要素が空間を動きそして要素間の結合が変化していく系を扱う。つまり、ある2つの要素がある時刻で結合しているが、その後に、結合が破れ得る系、あるいは結合の強さが変化する系である。我々はこの様な系に共通する一般的な性質に興味がある。

上で述べた拡散的あるいは大域的結合系では、各要素の振動は場の変数と見做す事が出来る。しかし、振動要素が空間中を動いた時、その要素の振動変数は空間の中での場の変数と見做す事は出来

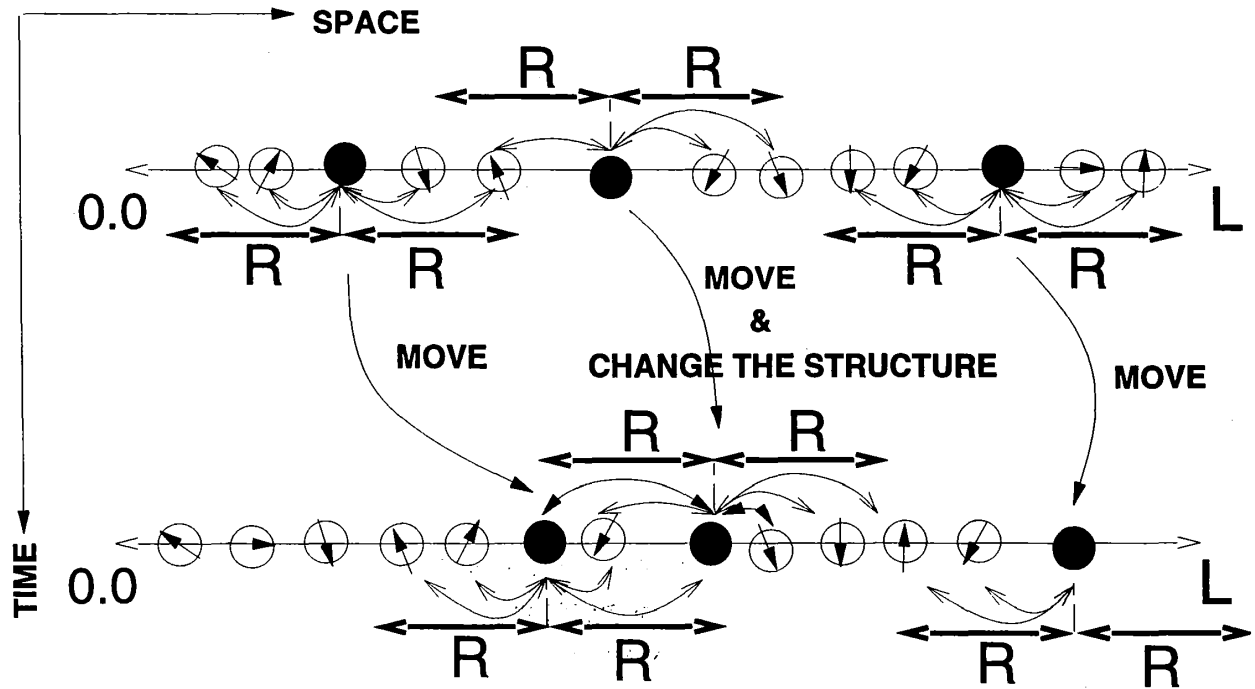


図 3.1. CMG の概観図。○ は要素の位置を表す。● は半径  $R$  の内にある他の要素と結合している。時間発展と共に要素は位置を変え、それに応じて結合構造を変化させる。

ない。そこで我々は要素の振動を内部動力学、空間中の移動を要素の外部動力学と考えよう。従って我々の関心は内部動力学と外部動力学を持つ要素の結合系であり、内部動力学と外部動力学の相互干渉系における一般的性質である、と言う事が出来る。

モデルを作るにあたって以下の制約を課す：1) 各要素は内部状態と空間中に位置を持つ。2) 要素はアクティブな要素である。従って要素はそれ自身で内部状態の振動の動力学を持つ。3) その内部の動力学は空間における他の要素と局所的な（大域的ではない）相互作用によって影響を受ける。4) 要素は他の要素との相互作用によって移動する。その際の相互作用はそれぞれの要素の内部状態に依存する。このことによって、要素間の相互作用は変化する可能性を持つ。

以上を踏まえて、アブストラクトなモデルとして Coupled Map Gas<sup>ii</sup> (CMG) を提案する。要素は 1 変数の内部動力学を持ち、動力学としては 1 次元のカオス写像を採用する。そして、内部状態の動力学は空間中で近隣の他の要素と結合している。要素は空間中を動くが、移動は自身とそれが相互作用をしている他の要素の内部状態に依存している。簡単なモデルは以下のようになる。

$$\begin{aligned} x_{n+1}(i) &= g(x_n(i)) + \epsilon \left\{ \frac{1}{N_n(i)} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} g(x_n(j)) - g(x_n(i)) \right\}, \\ \vec{r}_{n+1}(i) &= \vec{r}_n(i) + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \frac{\vec{r}_n(j) - \vec{r}_n(i)}{|\vec{r}_n(j) - \vec{r}_n(i)|} F(x_{n+1}(i), x_{n+1}(j)) \end{aligned} \quad (3.3)$$

第 1 式は各要素の内部動力学を表す。第 2 式は移動の動力学を表す。  $n$  は離散時間、  $i(=$

<sup>ii</sup>Gas という単語は 17 世紀に空虚な空間や大気を意味するギリシャ語の Chaos に似せて造られた言葉である。

$1, 2, \dots, N$ ) は要素のインデックスである. ここで, 内部動力学としては Logistic Map:  $g(x) = 1 - ax^2$  を採用する.  $x_n(i)$  は時刻  $n$  での要素  $i$  の内部の状態を表し,  $\vec{r}_n(i)$  は  $d$  次元空間でのその時の位置を表す. また,  $|\vec{r}(j) - \vec{r}(i)|$  を要素  $i$  と  $j$  の間の距離とすると,  $\mathcal{N}(i) = \{j | |\vec{r}_n(j) - \vec{r}_n(i)| \leq R\}$ , である. すなわち,  $\mathcal{N}(i)$  は要素  $i$  からの距離が  $R$  である要素の集合で,  $N_n(i)$  はその数である. つまり, 要素は自らの位置から距離が  $R$  以内にある要素と相互に作用を及ぼし合う.  $F(x_{n+1}(i), x_{n+1}(j))$  は要素間に働く“力”を表し, 相互作用する 2 つの要素の内部状態の関数になっている. ここでは,  $f$  を定数として,  $F(x_i, x_j) = f \cdot x_i \cdot x_j$  を採用する. 全ての要素数は  $N$  で表される. 1 次元系では空間の大きさを  $L$  で表し, 周期境界条件を課する. このモデルの概観図を図 3.2 に示す.

モデル (3.3) でコントロール・パラメータは  $a, \epsilon, N(\frac{R}{L})^d$ , と  $\frac{f}{R}$  である.  $a$  は各要素の内部動力学における非線形性の強さを表すパラメータであり,  $\epsilon$  は要素間の結合の強さを表す. また,  $N(\frac{R}{L})^d$  は密度に相当し  $\frac{f}{R}$  は有効な移動のし易さ (移動度) を表す. 本章では主に 1 次元空間について考え,  $\frac{NR}{L} \sim 10, \frac{f}{R} \sim 0.01$  に固定する. 有効な移動度  $\frac{f}{R}$  は比較的低く押さえられているので, 空間中の運動は時間が離散的にもかかわらずスムーズである. ( $\frac{f}{R}$  は微分方程式を差分化した時の時間の刻み幅に相当すると考えることも出来る.)

我々は個々の要素の内部動力学として Logistic Map:  $1 - ax^2$  を採用した. この系において各要素は, それが孤立している時においても周期的振動やカオスの振動を示すという意味でアクティブな素子である. これは, 最近なされている集団運動系の研究とは対照的であり, 例えば群の運動 [22, 23], 蟻の集団行動 [24], などの研究では系は受動的な要素によって構成されている.

ここで採用したモデル (3.3) では, 空間中での運動は過減衰することを仮定している. すなわち, 力の項は要素の位置に直接影響していて, 運動量を通じて慣性が影響する事はない. 各要素に運動量を新たな変数として導入することも出来るが, 実際に導入して行なった数値計算では摩擦の効果がある限り同様の結果となる. そこで, ここでは過減衰の場合について焦点を当てる.

2 つの要素間の力の項  $F(x(i), x(j))$  の選択には任意性があり, ここでは簡単のために上の項を採用した. しかし, 本章で述べる結果は力の項の選択にもかかわらず一般性があるように思われる. 一例として  $F(x(i), x(j)) = \cos[2\pi(x(i) - x(j))]$  の場合についても調べたが, 定性的な性質は変わらない.

今の場合, 2 つの要素間の力の項  $F(x(i), x(j)) = f \cdot x(i) \cdot x(j)$  は各要素の内部状態の正負に依存して引力や斥力になる.  $f > 0$  の場合, 互いに同符号であれば引力, 異符号であれば斥力になる. 内部変数は区間  $[-1, 1]$  を変化するので平均として引力か斥力かは要素間で内部変数の同期がどの程度かに依る. ここで注意しておくが, 一つの Logistic Map では  $x$  の平均値は正である. 従って  $f$  が正であれば, 要素の振動が完全に独立で同期がなくても力の平均は正となる.

CMG を結合写像系の文脈の中で考えると, CML において要素を各格子点から解放する拡張となり, 要素が距離  $R$  で等間隔に並べば CML と等価になる. また, 要素間の結合が半径  $R$  で閉じれば, それは GCM と等価になる. このように CMG は自ら CML から GCM の範囲へ結合の構造を動的に選択する系である (図 3.2).



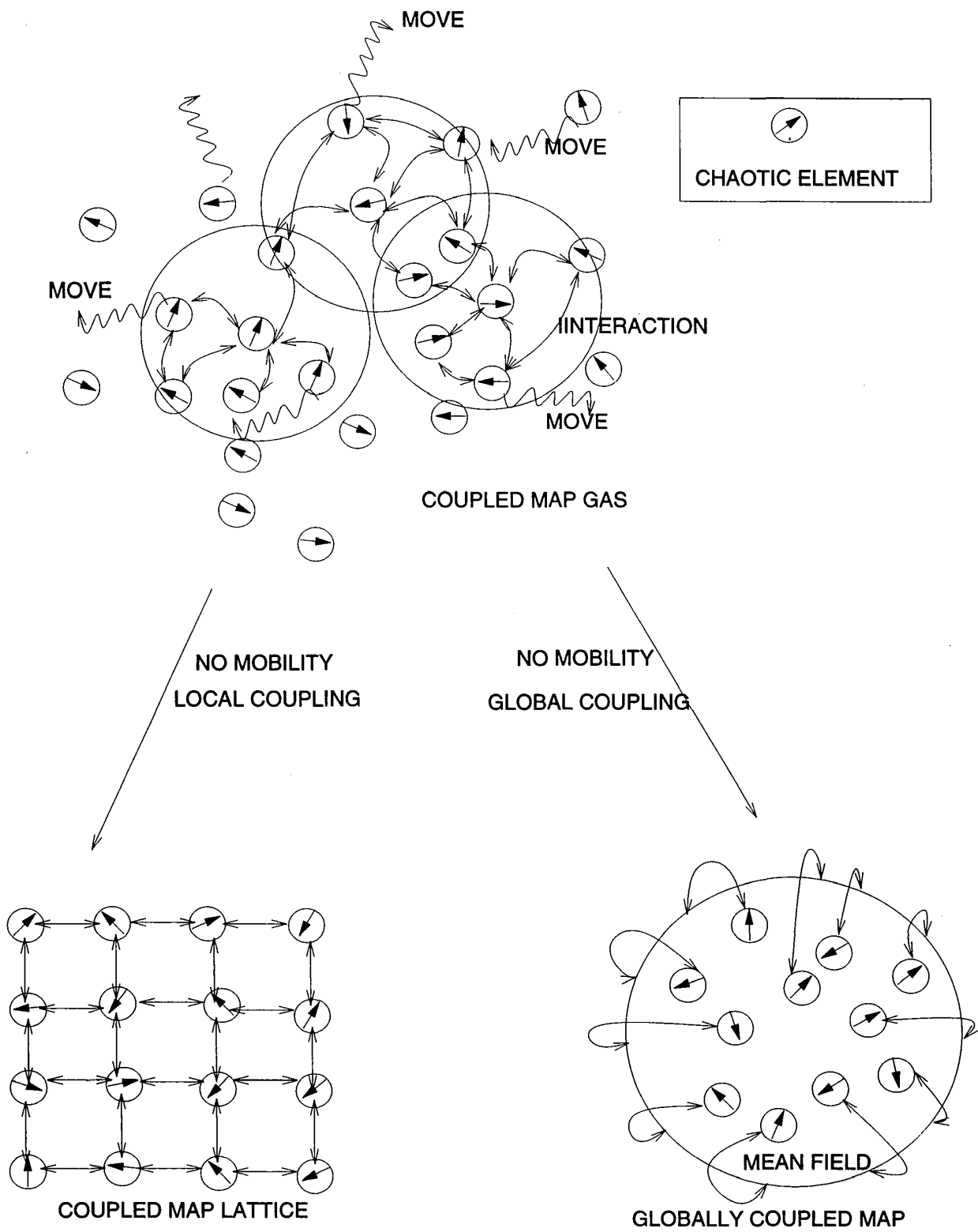


図 3.2. カオス素子多体系

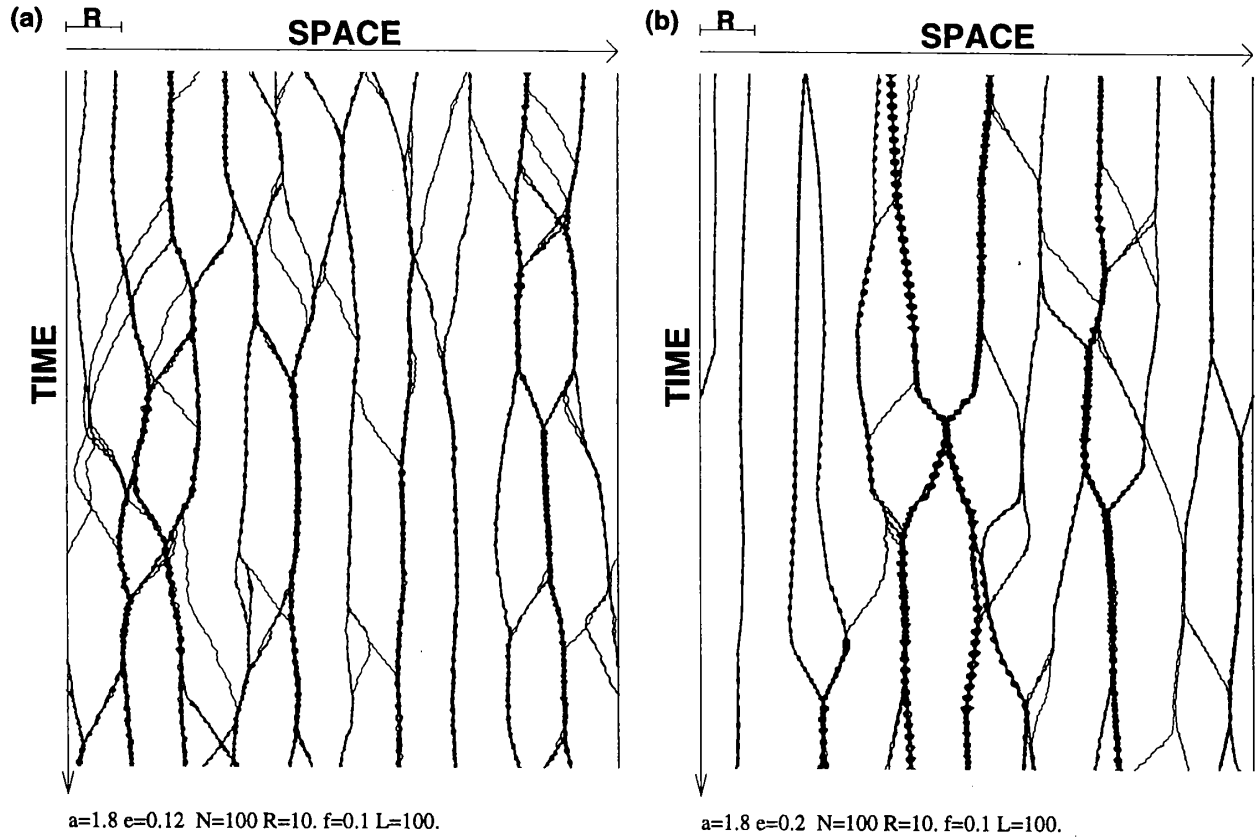


図 3.3. (a)(b)1次元での各要素の軌跡. 縦軸は時間. 横軸は空間. ランダムな初期条件から始めて, 適当なトランジェント状態の後各要素の軌跡を線で結んだものを 250 ステップに渡って描いたもの上の R はレンジの幅を書いた. 各パラメータは図の中に書き込んである.

別の視点から我々のモデルを見てみよう. モデル (3.3) で空間が 1 次元の場合, 以下のように書き換えることが出来る.

$$r_{n+1}(i) = r_n(i) + f \cdot x_{n+1}(i) \left\{ \sum_{j \in \mathcal{N}_l(i)} x_{n+1}(j) - \sum_{j \in \mathcal{N}_r(i)} x_{n+1}(j) \right\}$$

ここで,  $\mathcal{N}_l(i) = \{j | j \in \mathcal{N}(i), r(j) < r(i)\}$ ,  $\mathcal{N}_r(i) = \{j | j \in \mathcal{N}(i), r(j) > r(i)\}$ . この形に変換すると, 右辺の第 2 項は要素が位置  $r$  に作る場の勾配と見做すことが出来る. 要素は自らが作り出す場の中で勾配を感じて移動するが, 場はその移動によって影響を受け, 更にそのことが各要素に跳ね返っていく. 同様の視点は空間の次元が 2 次元や 3 次元の場合にも当てはめることが出来る.

### 3.3 現象

この節では, 我々のモデルで見られる諸現象について, 簡単に触れる. その詳細な解析はこの後の節において述べる予定である. 1 次元系での各要素の軌跡を描いた図が図 3.3 である. 空間における各要素の軌跡は線で描いた. 詳しい見方は図の説明を参照されたい.

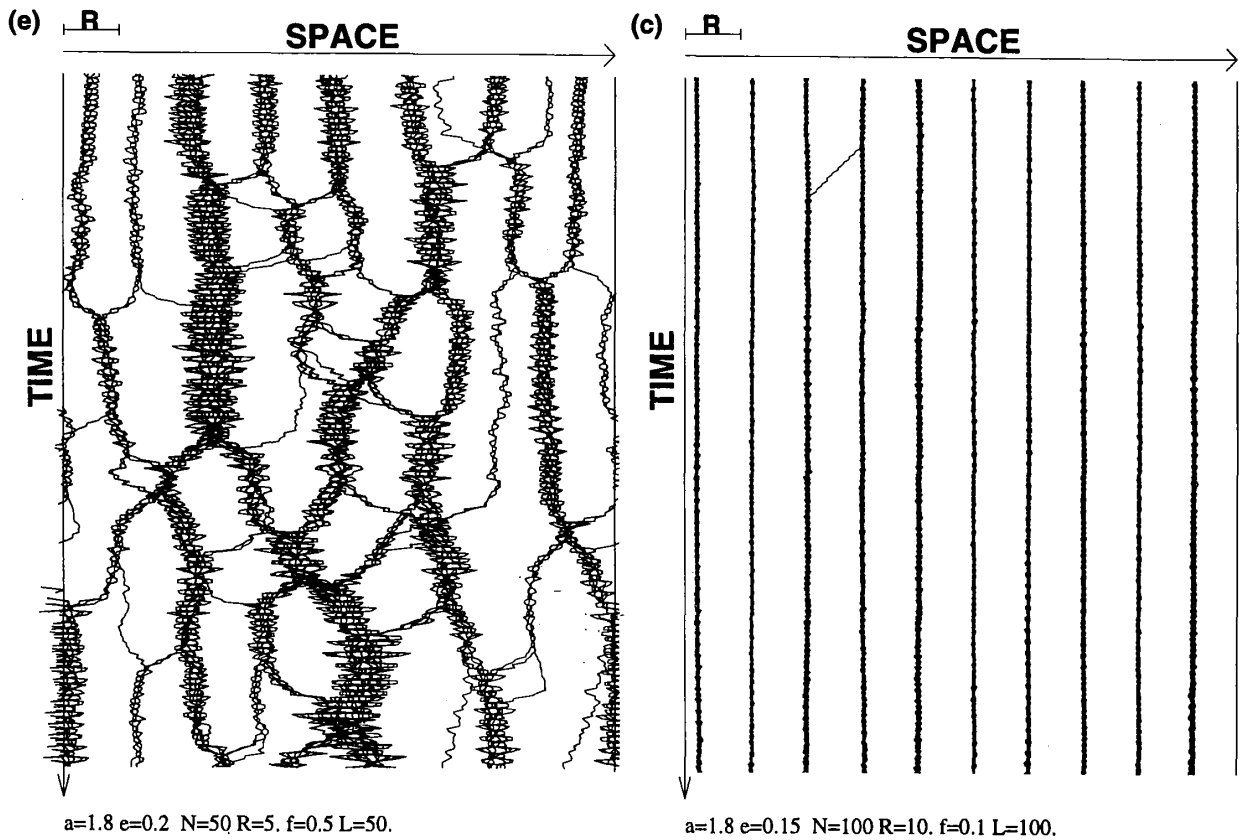


図 3.3. (c)(d).1 次元での各要素の軌跡. 縦軸は時間. 横軸は空間. ランダムな初期条件から始めて, 適当なトランジェント状態の後各要素の軌跡を線で結んだものを 250 ステップに渡って描いたもの上の  $R$  はレンジの幅を書いた. 各パラメータは図の中に書き込んである.

時空間における系のダイナミクスを表すのに, “クラスター” の概念は導入する. ここでは “クラスター” を半径  $R$  にあり, 互いに相互作用をしている要素のかたまりとして定義する. (ここで用いる “クラスター” の語は前章でみた GCM での使い方とは異なるので注意する. GCM では振動が同期している要素のグループを “クラスター” と呼んだ (§1.2.4 参照). そして, クラスターのダイナミクスの違いに応じて, システムの状態を次の 3 種に区別できる.

1. 要素はクラスターを形成するべく集まる. しかし, 出来たクラスターは静的では無い, すなわち, クラスターは他のクラスターと相互作用をしながら要素を交換している. また, クラスターは頻繁に分裂や融合を繰り返している. この意味でクラスターは動的であり, クラスターを形成している要素も次々と入れ替わっていく. このクラスターの形成と崩壊が時間発展の中で繰り返し起こる. (図 3.3 (a)(b)(c))
2. 一方, クラスターは形成されるが他のクラスターとの距離が  $R$  以上離れる場合がある. この場合, クラスターは他のクラスターと相互作用が無い. それ故, 隣り合う 2 つのクラスターは互いに独立であり, 要素を交換する事もない. クラスターの空間での大きさも  $R$  より小さい. 従って, クラスターを形成する要素は全結合しており (=GCM), クラスターの空間での動力学は GCM の一つの表現となっている. (図 3.3(e)(f))
3. 要素はクラスターを形成するが, その際, クラスターが隣り合う他のクラスターとの距離を  $R$

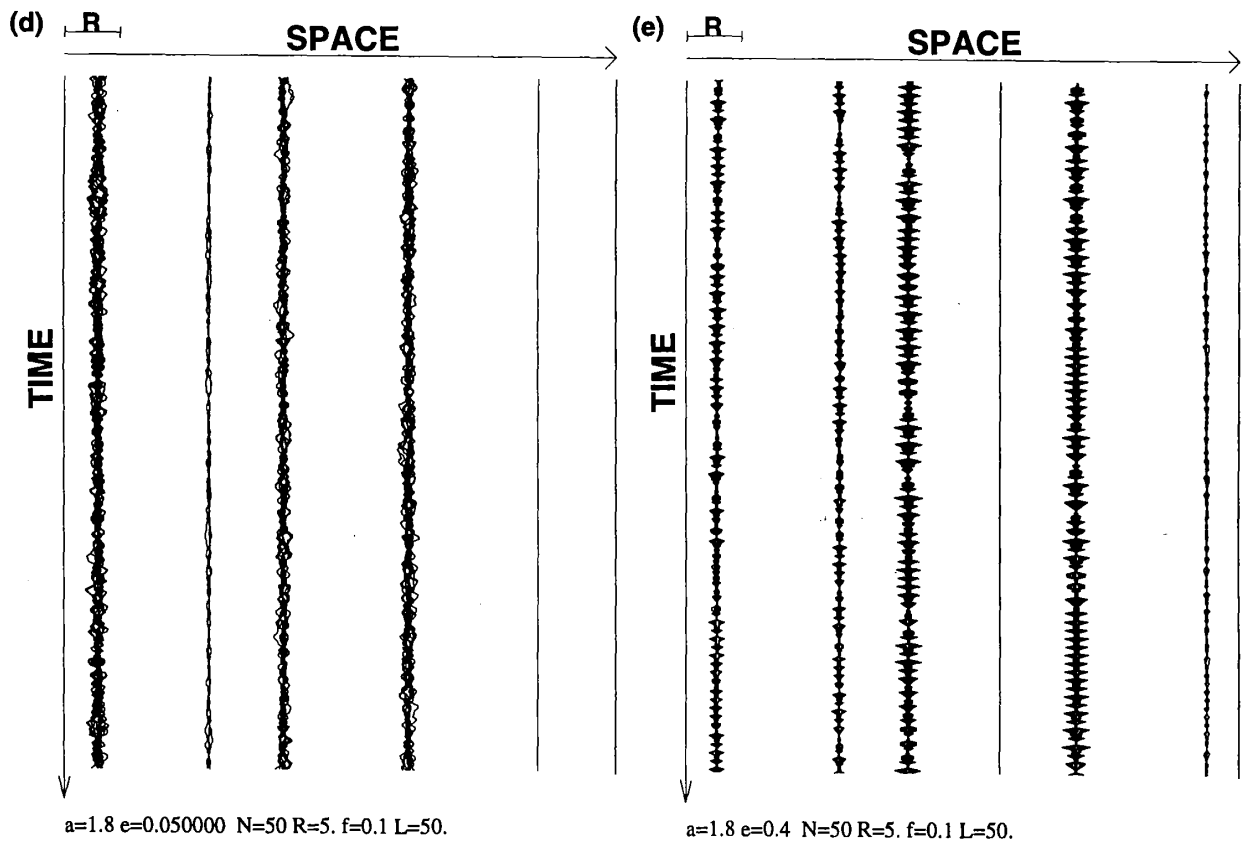


図 3.3. (e)(f).1 次元での各要素の軌跡. 縦軸は時間. 横軸は空間. ランダムな初期条件から始めて, 適当なトランジェント状態の後各要素の軌跡を線で結んだものを 250 ステップに渡って描いたもの上の  $R$  はレンジの幅を書いた. 各パラメータは図の中に書き込んである.

程度に保つべく振る舞う. 要素は自らが構成するクラスターを共に構成する他の要素と相互作用をしているが, その他に隣り合うクラスターの要素の一部とも相互作用をしている. また, 隣り合うクラスターは互いの要素を間欠的に交換する. (図 3.3 (d))

2 次元系では空間の広がりを反映して, 形が多様性が現われる. 図 3.4 は 2 次元系における時間発展の 1 例で, 時系列を連続するスナップショットで表した. 初め 1 つの円状の集合を形成していた要素がやがて, 2 つの円状のクラスターに分裂していく様子が見える. あたかも細胞が分裂していくようである.

本論文では 2 次元系での結果についてはこれだけに止め, 以後では主に 1 次元系における結果について述べる.

### 3.4 相図 (Global Phase Diagram)

前章で見たように, モデル (3.3) ではパラメータが変化するにつれて, 幾つかの現象が見られる. 様々な初期条件から始めて得られた結果 (相 (phase)) を区別するために以下の 3 つの量を導入する. 主に空間での要素の動き, 相互作用の構造の動力学, 内部状態のコヒーレンス, の 3 点に注目す

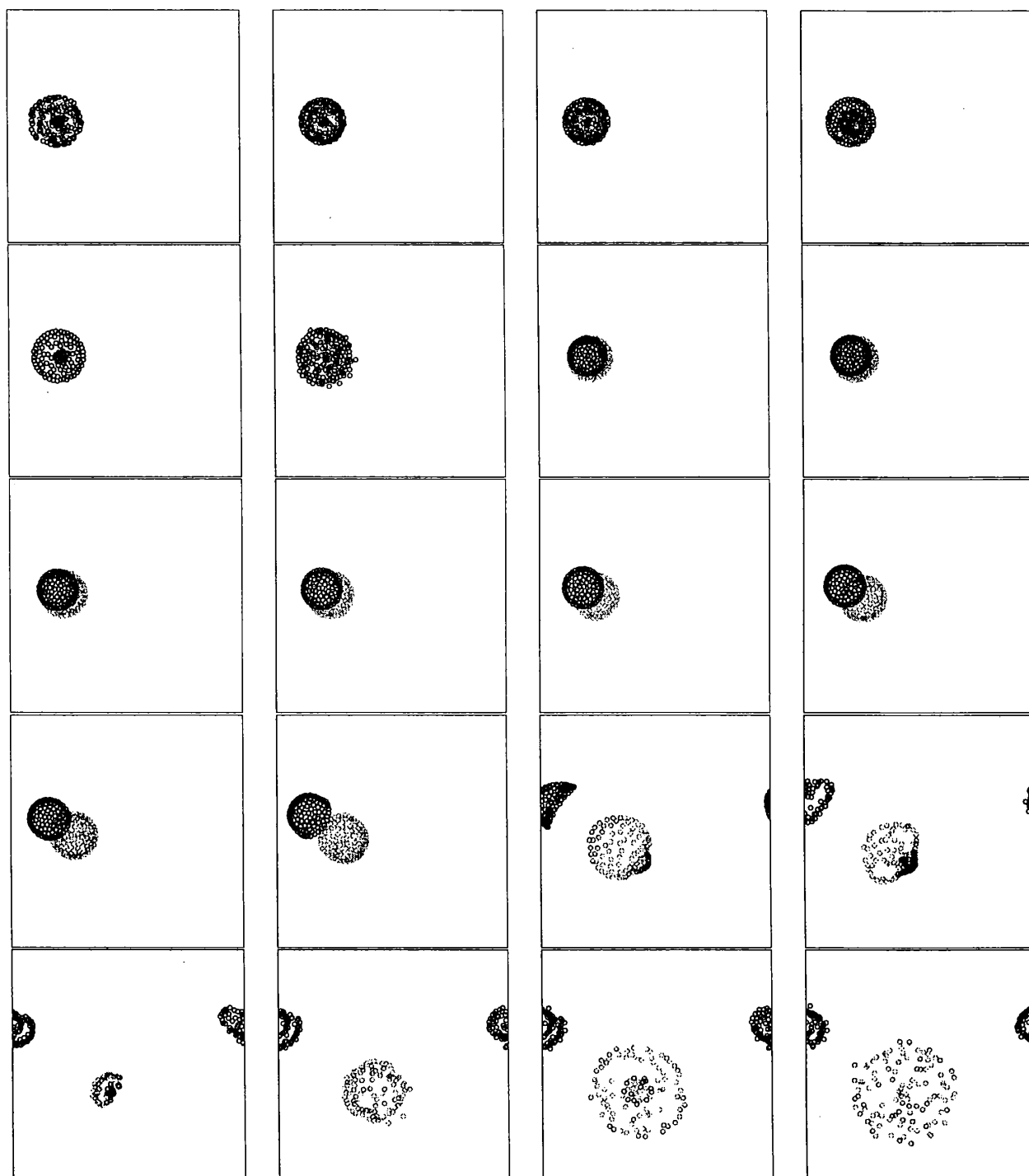


図 3.4. 2次元系での時間発展の一例. それぞれの円は要素の位置を表す. また, 円の濃淡は要素の内部状態を離散化して表したものである. 時間は左上から右下へと進む. ランダムな初期条件から始め, クラスターが形成された後4ステップおきに描いた. 境界条件は周期境界条件

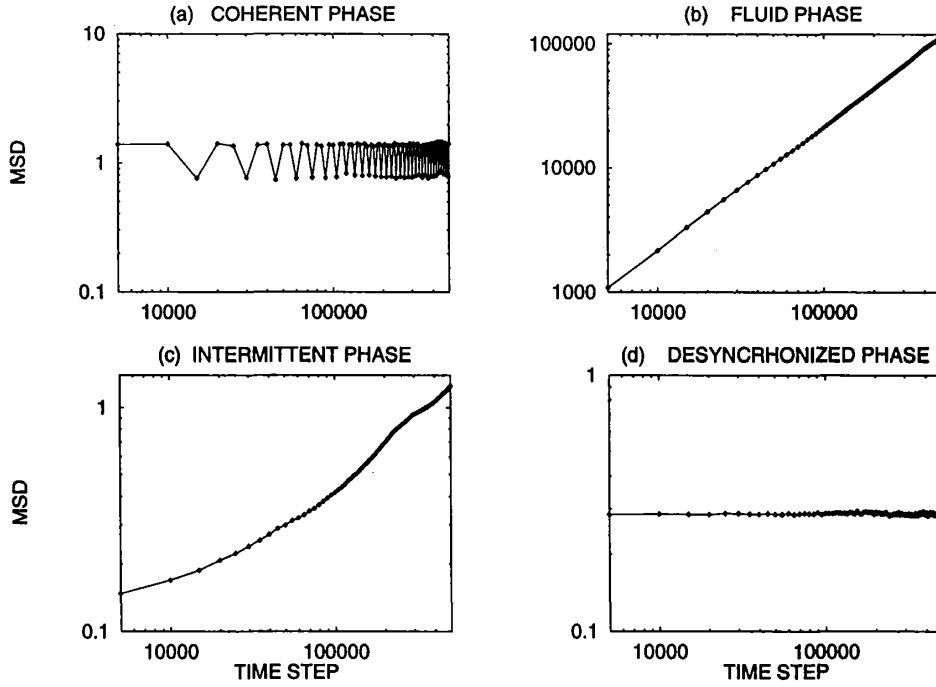


図 3.5. Mean Square Deviation(MSD). MSD の定義は本文を参照. (a) コヒーレント相 (coherent phase), (b) 流動相 (fluid phase), (c) 間欠相 (intermittent phase), (d) 非同期相 (desynchronized phase).  $a = 1.8$ ,  $N = 100$ ,  $R = 10$ ,  $L = 100$ ,  $f = 0.1$

る.

### 3.4.1 3つの統計量

1. 要素の拡散: モデル (3.3) ではパラメータの変化によって要素が空間を動く場合や、局在する場合がある. 空間を動く場合、要素は拡散的である. 従って、要素の拡散を測る量を導入すると便利である. ここでは空間における Mean Square Displacement(MSD) を導入する.

$$R^2(t) = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (r_{t+t_0}(i) - r_{t_0}(i))^2 \right\rangle.$$

ここで、 $\langle \cdot \rangle$  は様々な時刻を  $t_0$  としてその統計平均を意味する.

MSD が  $t$  に比例して増加していくならば、要素の拡散係数が意味を持つ. そこで、以下のように拡散係数を導入する.

$$D = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} R^2(t) \quad (3.4)$$

2. 要素の結合構造の変化: 我々のシステムでは要素の移動のためにある時刻ある要素の組の間で成り立つ結合が次の時間ステップで維持されるとは限らない. ここで、要素の結合のつながりを“結合構造”や“結合関係”と呼ぶことにする. 我々は結合構造の変化を見ることで要素の間の相互作用の変化を調べる事が出来る. また、これによってパラメータに依る系の振舞の違いを区別する事が出来る.

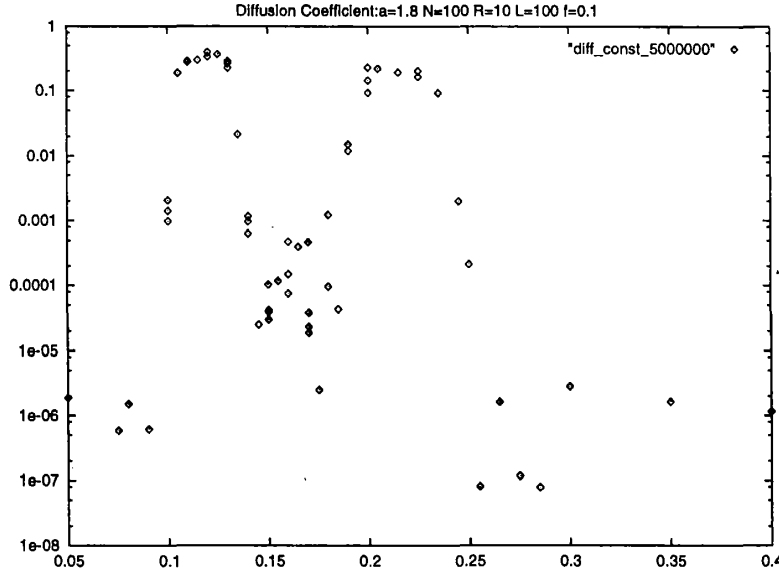


図 3.6. 拡散係数を  $\epsilon$  を変化させてプロットしたもの.  $a = 1.8, N = 100, R = 10, L = 100, f = 0.1$

これを数値的に測るために以下の量を導入する. 任意の 2 つの要素の組がある時刻で結合していた時, 次の瞬間にも結合している条件付き確率 (CC 確率 と呼ぶ) と, 任意の 2 つの要素の組がある時刻で結合していない時, 次の瞬間にも結合していない条件付き確率 (DD 確率 と呼ぶ) を考えよう. 我々のモデルではそれらの確率は以下のように計算される. 任意の  $i, j$ , に対して,

$$(CC\text{確率}) = P(|r_n(i) - r_n(j)| \leq R \mid |r_{n-1}(i) - r_{n-1}(j)| \leq R)$$

$$(DD\text{確率}) = P(|r_n(i) - r_n(j)| > R \mid |r_{n-1}(i) - r_{n-1}(j)| > R).$$

ここで,  $P(A|B)$  は 事象  $A$  が起こった時に事象  $B$  が起こる条件付き確率を表す. また, 結合  $\rightarrow$  非結合 (CD), 非結合  $\rightarrow$  結合 (DC) の条件付き確率は以下ようになる.  $1 - (CC \text{ 確率}) (= CD \text{ 確率})$ ,  $1 - (DD \text{ 確率}) (= DC \text{ 確率})$ . もし, 結合構造に変化が無ければ, CC や DD 確率は 1 になる. 一方, 結合構造に頻繁な変化があれば, その度合に応じてそれらは小さくなる.

3. 要素間の内部状態のコヒーレンス: GCM では, 要素間の結合が強い場合, 結合しているすべての要素のカオス振動が同期する. 我々のモデルでは  $R$  の範囲で強く結合した時, 内部状態は同期することが出来る. 結合構造が変化するとそのようにして出来た同期は壊れる. 一方で,  $R$  を越えて, 要素の内部状態にコヒーレンスが保たれることがある. 従って, 系の状態を表すのにコヒーレンスの程度を測る量を導入する.

### 3.4.2 相図 (Global Phase Diagram)

MSD の時間変化について, パラメータ空間の中で代表的なものを図 3.5 に書いた. また, 拡散係数 (式 (3.4)) を図 3.6 にプロットした. ただし, 要素の非線形性を  $a = 1.8$  に固定して結合の強さ  $\epsilon$  を変化させた時の係数の変化である. 図 3.6 では拡散係数が相対的に小さい 3 つの領域があり, それらが拡散の大きい領域によって隔てられていることが分かる. この図の拡散係数は有限時間 (500000

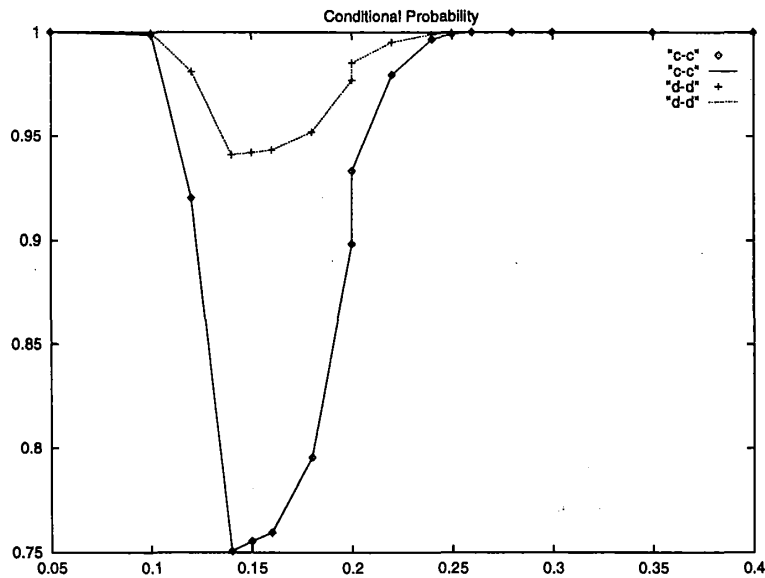


図 3.7. (CC-),(DD-) 確率. 任意の 2 要素がある時刻で結合していた時に, 次の時間ステップでなお結合している条件付き確率 (実線) と, ある時刻で結合していない時に次の時間ステップで結合していない条件付き確率 (点線)  $\epsilon$  が変化している.  $a = 1.8, N = 100, R = 10, L = 100, f = 0.1$

steps) で得られた MSD を元にして計算しているので, それら 3 領域で拡散係数が 0 であるかどうかを結論付けることは出来ない. そこで, MSD の時間発展の振舞いの違いを見ることにする. すなわち,  $MSD \propto t$  であるが傾き (拡散係数) が非常に小さい状態であるのか, それとも時間に比例せずにある定数の周りに漸近して行く状態であるのか, を見る. 3 つの領域の中で後者の振舞いははっきりと見られるのは 2 つの領域で,  $\epsilon > .25$  と  $\epsilon < .11$  である (図 3.5(a)(d)). 従って, この 2 領域 (結合が強い領域と弱い領域) では要素は空間中のある領域に局在している. このことは, §3.3 で分類したクラスターのダイナミクスのうちの 2 及び図 3.3(e)(f) の特徴をよく表現している. 一方, 真ん中の領域では MSD は時間に比例して増加して行く (図 3.5(b)). しかし, その拡散は極めてゆっくりで間欠的である. これは, §3.3 で 3 及び図 3.3 (d) で見られる状態を特徴付けている. また, 拡散係数が大きい 2 つの領域は, 前節で 1 及び図 3.3 (a)(b)(c) に相当する.

また, 結合構造の変化を図 3.7 に示した. CC, DD 確率を結合の強さ  $\epsilon$  の変化と共に描いた. 他のパラメータは固定してある.  $\epsilon < .11$  や  $\epsilon > .25$  の領域ではそれらの確率は 1 である. これは, 結合構造に変化がないことを示している. 一方, 上で拡散が間欠的であると判断した領域では, それらの確率が小さくなっている. これは, 要素の間の結合の関係が頻繁に変化をしていることを示している. 従って, 図 3.6 での結果と併せて考えると, このパラメータ領域では拡散係数が低く, 拡散が極めてゆっくりであるが, 一方でその結合構造は非常に頻繁に変化している.

そこで, 先に導入した統計量に基づき, 系の相 (phase) を以下のように分類し, その特徴を整理する. 簡単な相図 (phase diagram) を図 3.8 に示した. 次の 5 つの相に分類する. 1) コヒーレント相 (coherent phase), 2) 流動相 (fluid phase), 3) 間欠相 (intermittent phase), 4) 非同期相 (desynchronized phase), 5) ジグザグ相 (Zig-Zag phase).

1. コヒーレント相 (coherent phase): 要素はクラスターを形成するが, それらは独立して, 他の



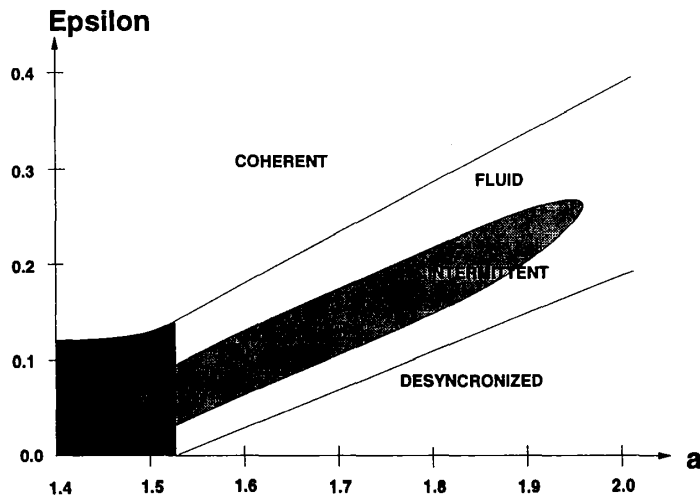


図 3.8. 相図.

	Diffusion	Change of Coupling Relation	Cohrence
コヒーレント相	×	×	○
流動相	○	○	×
間欠相	○(weak)	○(frequent)	○(ZigZag)
非同期相	×	×	×(Turbulent)
ジグザグ相	×	○	○ZigZag

Table 3.1. 各相の特徴を表にまとめたもの. 詳しい内容は本文を参照.

クラスターと  $R$  以上の距離を保ち, 互いに相互作用はない. クラスターは他のクラスターと相互作用の無い位置に形成されるので, 要素は同じクラスターを形成する他の要素とのみ相互作用をし, 全結合している. 従って, 結合関係の変化はない. また, 要素の拡散もない. 各クラスター内では要素の振動は同期している. それ故, クラスターを構成する要素の動力学は GCM と等価になる. 従って, この相は GCM で見られる要素の振動が完全に同期した状態に他ならない. 図 3.3(f) はコヒーレント相の時間発展である. 各クラスターは孤立している.

2. 流動相 (fluid phase): クラスター構造は要素の内部動力学と要素の空間運動動力学の相互干渉によって結合構造は頻繁に変化している. そして, 要素は他の相に比べるとずっと速く拡散していく. 図 3.3(a)(b) は流動相の時間発展であり, クラスターは生成や融合や分裂を繰り返している様子が分かる. この相の詳しい構造は 3.5 で議論する.
3. 間欠相 (intermittent phase): 上で見た流動相は, 拡散が非常に小さい (がしかし 0 ではない) 領域, 間欠相によって 2 つに分かれている. 間欠相では, クラスター間の距離は  $R$  の周りに揺らぎ, クラスターは格子構造を形成している (図 3.3(d)). 各クラスター内では要素の振動は強く相関しており, 一方, 隣り合う 2 つのクラスターの間では振動の位相が逆になっている. 従って, 振動まで含めて考えると, ジグザグの反磁性的な格子構造を長距離に渡って形成している

(詳しくは後述). この格子構造は一見, 静的である. しかし, 結合構造の変化は他の相に比べて大きい. (CC-) と (DD-) 確率が低いことはこのことを表している (図 3.7). 流動相とは対照的にクラスターは分裂するのではなく, 一つずつ, 要素が隣のクラスターに間欠的に移動する. 図 3.3(d) では, 等間隔の格子構造を形成しているが, 途中で一つの要素が隣のクラスターに移動している. この相に見られる構造の機構と動力学に関しては §3.6 で議論する.

4. 非同期相 (desynchronized phase): コヒーレント相と同様に結合関係の変化もなければ, 空間中の要素の拡散もない. 要素は空間中で距離を  $R$  以上に保ったクラスターを形成する. それぞれの要素の振動はカオティックで, 各クラスター内で要素間の振動には相関がなく, 非同期的である. 従って, 要素間ではしばしば斥力が働く. それにも関わらずクラスターは分裂したり, 要素が他のクラスターに移動することはない. クラスター内の要素の間で振動がばらばらであるのは GCM における乱流相 (§1.2.4 参照) に対応している. この相で見られる, 空間クラスターの形成の機構は自明なことではない. この問題については 3.5.2 で考える. 図 3.3(e) では孤立した各クラスター内で要素の位置が乱雑に変わっている.
5. Zig-Zag 相 (Zig-Zag phase): ここでは, 結合構造の頻繁な変化がある. しかし, 要素は拡散しない. クラスターはほぼ  $R$  の間隔をおいて並んでいる. 各クラスター内では, 振動は相関しており, 一方 2 つのクラスター間で振動は逆位相になっている. Zig-Zag 相では, 要素は周期 2 のバンド構造を持つ. 要素の状態を内部変数の正負のみで表せば, クラスター内で要素は  $+-+-+\dots$ , と振動する. その時, 隣のクラスターは  $-+-+-\dots$  のように逆位相で振動している. 従って, 内部状態  $x$  はクラスターを単位として空間にジグザグのパターンを形成する.

### 3.5 空間における動的クラスター形成

我々のモデルではパラメータ空間の広い範囲で要素の空間における動的なクラスター化が見られる. そして, 流動相ではクラスターが繰り返し, 形成, 融合や分裂をする.

結合写像系で見られる振動の動的なクラスター化現象 (特に相空間における振動のクラスター化) については様々な角度から調べられて来た [11]. 我々のモデルで重要なのは, 空間におけるクラスター化である. この際も振動の同期が重要で, 要素間の振動の同期の程度が互いに及ぼす力に影響し, それが空間構造の形成を導く. 以後では, 要素多体系における << 内部動力学 (internal dynamics), 相互作用 (interaction), 構造形成 (structure formation)>>. の 3 者の関係を明らかにしていきたい.

この節では初めにクラスターの生成, 融合, 分裂の過程の機構について議論する. 次に, そのような過程の無い 2 つの相について議論する.

#### 3.5.1 クラスターの生成, 融合と分裂の機構

$R$  の範囲にある要素は互いに全結合している. 全結合をしている状態は, GCM によれば (§1.2.4), 要素間の結合が強い方から完全な同期状態 (コヒーレント相), 秩序相 (ordered phase), 部分秩序

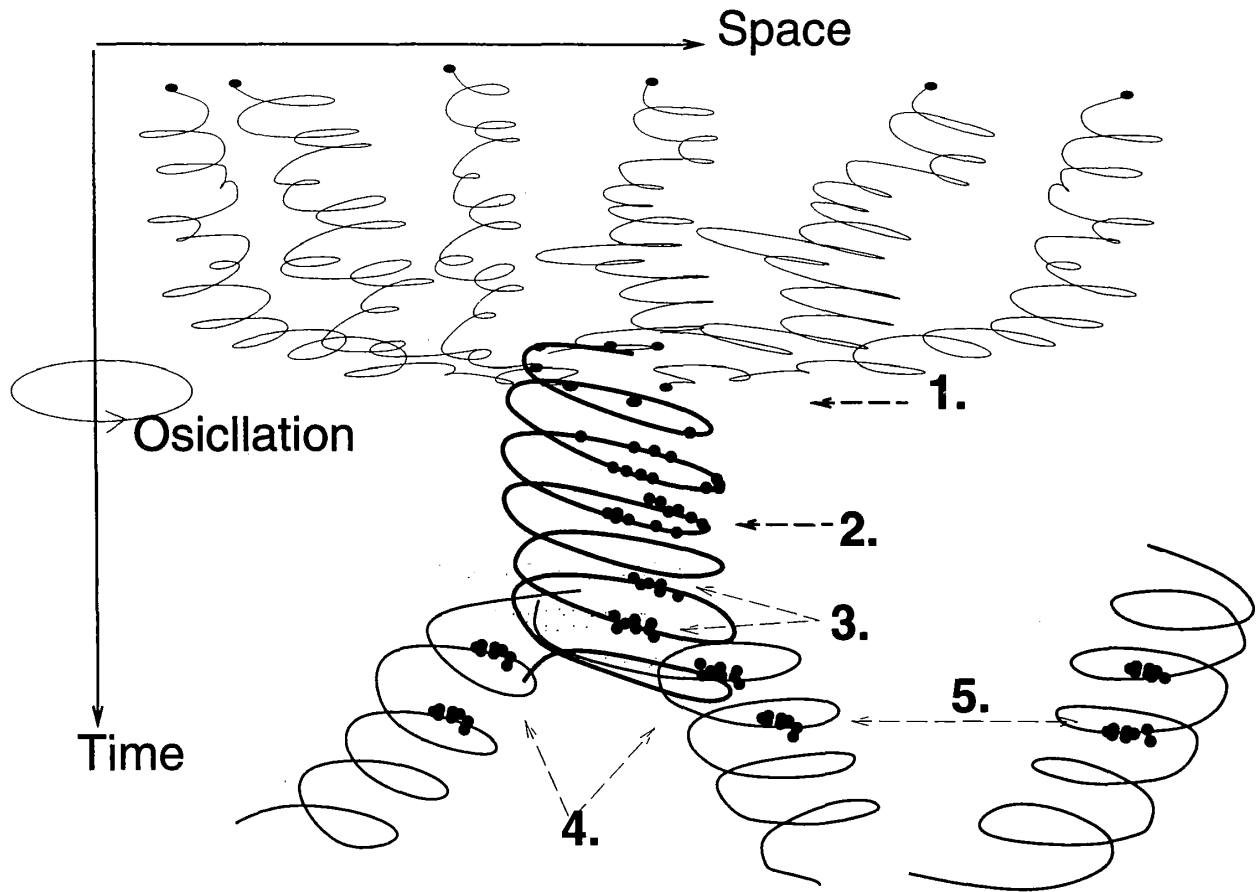


図 3.9. クラスターの生成, 融合, 分裂の機構の概観図. 1) クラスターの生成. 2) クラスターを構成する要素間で内部状態に幾つかの同期グループができる. 3) 大まかにいって  $x(i)$  の振動が  $+, -, +, -, \dots$  と  $-, +, -, +, \dots$  の 2 つの振動グループ. 4) 2 つの振動グループが分裂することで, 新たな 2 つのクラスター形成する. 5) 隣のクラスターと振動が大まかに揃っていると, 引き合っやがて融合する. 詳しくは本文参照.

相 (partially ordered phase), 乱流相 (turbulent phase) に分かれている. これら状態は, 要素間の結合の強さと, 個々の内部のカオス動力学のバランスで決まる. CMG においては振動の内部力学だけではなく, 移動の外部力学も考えなければならないが, GCM と似た構造を持っている. 以下ではクラスターの生成, 分裂や融合のプロセスを段階を追って説明していく. (図 3.9 に以上の過程の概観図を示した. 合わせて図 3.3 も参照の事.)

- 段階 1. 各要素は近隣の他の要素と相互作用をするが, 他の要素との結合は, 互いの内部状態を同期させる作用を持つ. 一方, それぞれの要素のカオス振動はその同期を壊す作用を持つ. もしも, 同期の傾向を持てば, 力は平均として引力の傾向を強めクラスターが形成される.
- 段階 2. 2 つの作用のバランスでクラスター内の振動は幾つかのグループに分かれる. これは, GCM における秩序状態に対応していると考えて良い.
- 段階 3. 再び  $x(i)$  の正負だけで内部状態を表現したとすれば, もしも, あるクラスター内で振動が大まかに言って  $+, -, +, -, \dots$  と  $-, +, -, +, \dots$  の 2 つのグループに分かれた時, 同じ振動グループ内では互いに引力が働くが, 別の振動グループでの要素間では互いに斥力が働く. 注意

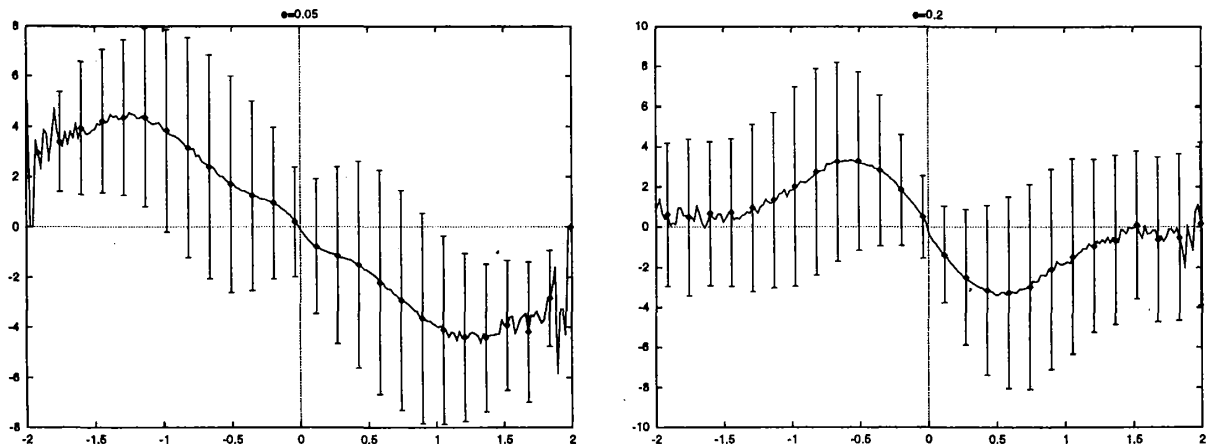


図 3.10. 要素が受ける力をクラスターの重心からの距離の関数として描いたもの。エラーバーはその揺らぎ (標準偏差) を表す。(a) 非同期相  $\epsilon = 0.05$ . (b) 流動相  $\epsilon = 0.2$ .

するのは振動が2つのグループに分かれつつあるのであって、今だ1つのクラスターを形成している事である。

段階4. 従って、2つのグループの間では平均として斥力が働き、1つのクラスターは2つのクラスターに分裂を始める。斥力は2のクラスターが  $R$  程度離れるまで働き続ける。それ故、2つの新しいクラスターは  $R$  程度の距離に離れていく。

段階5. 2つのクラスターが  $R$  以上離れ、クラスター間に相互作用がなくなると、それぞれのクラスター内での振動は不安定化を起こし段階2.に戻る。従って、それぞれのクラスターは再び分裂をする可能性を持つ。一方で他の2つのクラスターが距離  $R$  以内に近付き相互作用を始めた時、2つのクラスターの運動が互いに同符合の振動であれば、2つのクラスター間には引力が働きクラスターは融合する。もちろん、融合してできた新しいクラスターは段階2.に戻り、再び分裂や、他のクラスターと融合の可能性を持っている。

以上が分裂や融合を繰り返しの機構である。

### 3.5.2 クラスターの融合と分裂が無い場合

次にクラスターの分裂や融合が無い場合について考える。第一の場合は結合の強さ  $\epsilon$  が大きいコヒーレント相であり、第二の場合は  $\epsilon$  が小さい非同期相である。コヒーレント相ではクラスターを構成する要素は強く結合している。従って、要素間では常に引力が働いていて、それがクラスターを形成する原因となっている。過渡的状态を過ぎて要素がクラスターに分かれると、クラスターは互いに独立して、相互作用をしない。従って各クラスターの動力学はGCMのコヒーレント相と等価であり、クラスター内の振動は完全に同期している。以上から、同一のクラスターを構成する要素の内部状態におけるコヒーレンス、要素間の引力、そして、独立したクラスターの形成の3者の関係は明らかであり、整合的である。

一方、要素が弱い結合をしていて、要素の振動の間に相関がなくバラバラの状態の時を考える (非同期相)。この場合も要素は独立したクラスターを形成し、同じクラスターを構成する他の要素と大域

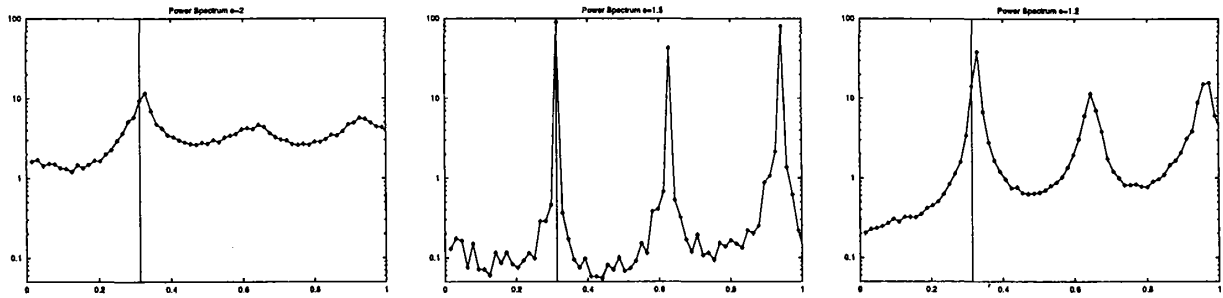


図 3.11. 空間パワースペクトル.  $P(k) = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x(j) e^{ikr(j)} \right\rangle$ . 図中の縦線は  $2\pi \frac{1}{2R}$ . (a) 流動相  $a = 1.8, \epsilon = 0.2$  (b) 間欠相  $\epsilon = 0.15$  (c) 流動相  $\epsilon = 0.12$

的に結合している。各クラスターの振動は GCM における乱流相と同等である。従って、要素の間に働く力はその正負も含めて頻繁に変化するので、クラスターの形成は自明なことではない。もしも、要素の振動が他の振動と相関の無い独立な振動であれば、各要素が受ける力はランダムであり、従って、要素はクラスターに留まるのと同じ確率でクラスターから飛び出して行くと考えられるからである。

クラスターが維持をされている状態は、要素はクラスター内を移動しながらもクラスターの周縁にくるとクラスターの中心へ向かう力が働いて外に出ることが出来ない状態であると考えることが出来る。その様子を見るためには、クラスターの中心をクラスターの重心と考えて、要素がクラスターの重心からある距離を離れた時に平均としてどの様な力が働いているかを調べればよい。図 3.10 はそれを調べたもので、要素に働いている力を重心からの (向きも含めた) 距離の関数としてプロットした。エラーバーはその揺らぎ (標準偏差) を表している。言わば、クラスター内のポテンシャルとその揺らぎを記したものである。図 3.10(a) は非同期相に対応するもので、中心方向に力が働いていることが分かる。また、クラスター周縁ではその揺らぎも小さくなっており、クラスターから外れていく場合が極めて起こりにくいことを示していると言えよう。このことは、図 3.10(b) と比較するとよく分かる。図 3.10(b) は流動相に対応するもので、力は平均としてクラスターの中心に向かって働いているものの、その揺らぎを併せて考えるとクラスターの外へ要素が外れていく事象が稀ではなく、しばしば起こっていることがわかる。このように非同期相ではその振動と移動の動力学により、このようなポテンシャルが集団運動によってできた各要素の配位によって自発的に形成され、クラスター構造を維持している考えることが出来る。

## 3.6 構造形成

この節では間欠相に関して、構造の形成という観点から詳細に見る。

### 3.6.1 構造形成の機構

流動相と同様なクラスターの生成、融合、分裂を繰り返す過渡的状态の後、クラスターは  $R$  程度の

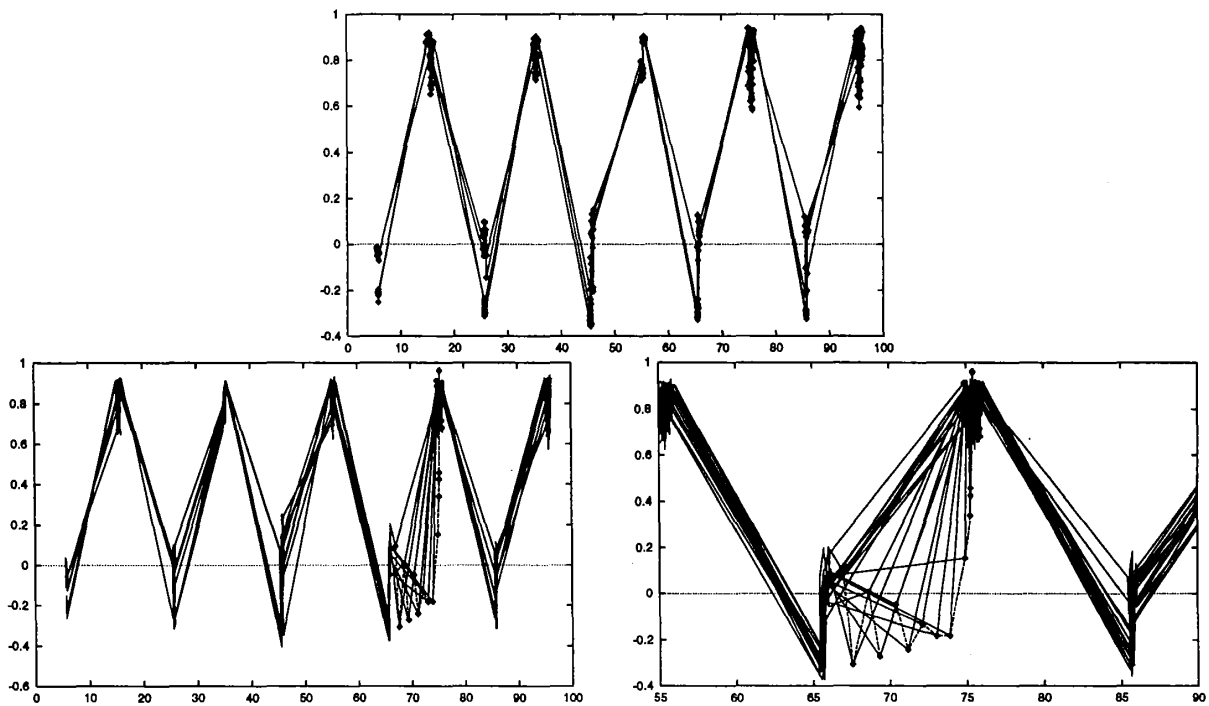


図 3.12. ジグザグのパターンと、間欠的拡散の様子を描いたもの。各要素の位置を横軸に、内部変数を縦軸にとり、40 ステップを2ステップおきにプロットした。線は要素をその位置の小さい順から並べ、 $r-x$  空間での位置を線で結んだもの。(a) 要素がクラスターを形成し、それが格子構造を作っている様子を表したもの。(b) 要素が拡散しているときの様子を前と同様に描いたもの。 $\diamond$  は隣のクラスターに移動していく要素の  $r-x$  空間での位置を追ったもので、点線でそれを順番に結んだ。(c) はその一部を拡大したもの。 $a = 1.8, \epsilon = 0.15$

距離を保って並ぶ。以下のように定義したパワー・スペクトル

$$P(k) = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x(j) e^{ikr(j)} \right\rangle$$

で振動まで含めた空間構造を見る。図 3.11 はそれをプロットしたものである。間欠相では流動相と比べてデルタ関数的なピークが見られ、長距離に渡って格子構造が形成されている事が分かる。しかし、そのピークの波数は  $\frac{1}{2R}$  である。このことは、振動成分までを考慮に入れなくてはならない。先に述べたように、各要素の振動は同一クラスターでは  $+, -, +, -, \dots$  のように同符号で振動している。一方、隣のクラスターではそれとは逆位相で  $-, +, -, +, \dots$  と振動する。従って、クラスターは距離  $R$  の間隔で逆振動が並びながら、長距離に渡ってジグザグのパターンを形成している。振動を考慮に入れて空間構造をプロットしたものが図 3.12(a) である。ところで、それぞれのクラスターでは振動は完全に同期してしまうことはなく、2 バンド的振動を基本としながらも、振動の様相はカオスである。これが、後で述べるように間欠的な拡散につながる。

この構造はどのように形成されるのだろうか。この構造は上の2種のクラスターがあって(一方が  $+, -, +, -, \dots$  振動で、他方が  $-, +, -, +, \dots$  振動)、それらが互いにバランスの取れた位置を探していくことで実現されているのではない。要素がクラスター構造を形成しつつ、隣どうしで互いに作用をする中で互いにその振動を規定しあうことで決ってくる。

その相互作用は構造形成後も必要である。あるいは、相互作用によって構造が維持されていると

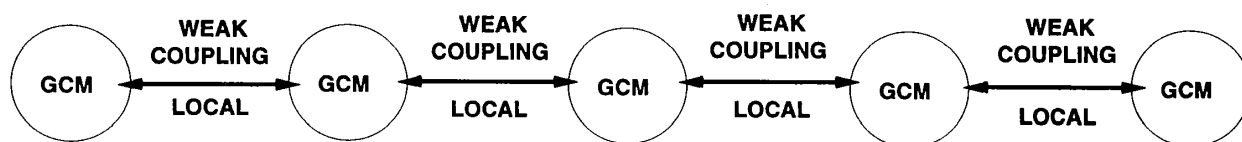


図 3.13. クラスタが格子構造を形成し、その構造が隣のクラスタと相互に作用しあう中で維持されている。それは格子上に GCM が並びその GCM が隣の GCM と弱く相互作用をしている構造を自発的に形成している、と見る事もできる。

言った方がよいであろう。そこで、構造形成後のクラスタ間相互作用を詳しく見よう。クラスタ内では、それを構成する要素は常に全結合をしている。一方、クラスタ間の相互作用は常に決まった要素と相互作用をしているわけではない。すなわち、隣のクラスタとの結合構造は頻繁に変化している。このことは、図 3.7 でみた。図 3.7 で (CC-), (DD-) 確率が小さくなっている領域は間欠相に対応し、結合構造の頻繁な変化を表している。したがって、系は格子上に GCM を形成しながら、その GCM が隣の格子上の GCM と相互作用をしていると見る事ができて (図 3.13), さらに GCM 間の結合はその構造を常に変化させていると言う事ができる。このような相互作用を通じて構造は維持されている。もしも、一つのクラスタを取り出し、孤立させると、そのクラスタの振動は壊れて、クラスタは分裂する。

このように、間欠相では結合構造が (他の相に比べて) 頻繁に変化していて、その意味でこの相はアクティブである。その中で、隣接するクラスタでの役割の分化が行なわれ、そのことが長距離の構造の形成を可能にしていると言える。この構造形成が、クラスタの分裂を押さえ、系を安定的な状態にしていると考えられる。また個々の振動も、構造形成の中で大域的なカオス振動を押さえ、2 バンド的な振動をしている。

### 3.6.2 間欠的な拡散

前に見たように要素は非常にゆっくりと拡散していく (拡散係数をプロットした図 3.6 を参照)。要素の拡散の様子は流動相とは随分違う。流動相ではクラスタは他のクラスタとの相互作用なしに自ら分裂することが出来る (§3.5 の流動相におけるクラスタの分裂の機構に関する記述を参照)。一方、間欠相では他のクラスタとの相互作用を通じて要素は拡散していく。その際、クラスタは分裂ではなく、1,2 要素が隣のクラスタに移動するのみである。また、拡散の時間に対する割合は数万ステップから数十万ステップに 1 度である。

先に見た構造形成とこの間欠的な拡散の発生を併せて考えると次の疑問が起こる。なぜ、クラスタは安定化しないか? あるいは、なぜ要素の間欠的な拡散は完全には押えられないのか? そして、その間欠的な拡散の起源は何か?

クラスタとしての動力学を見るために図 3.11 と同様にクラスタの“ポテンシャル”を描いたのが図 3.16 である。図 3.11(a) と比較すると、力の周りの揺らぎが大きく、要素の拡散の可能性があることが分かる。しかし、図 3.11(b) と比較すると、その可能性が非常に小さいことが予想でき、これは間欠的な拡散の現象と整合的である。

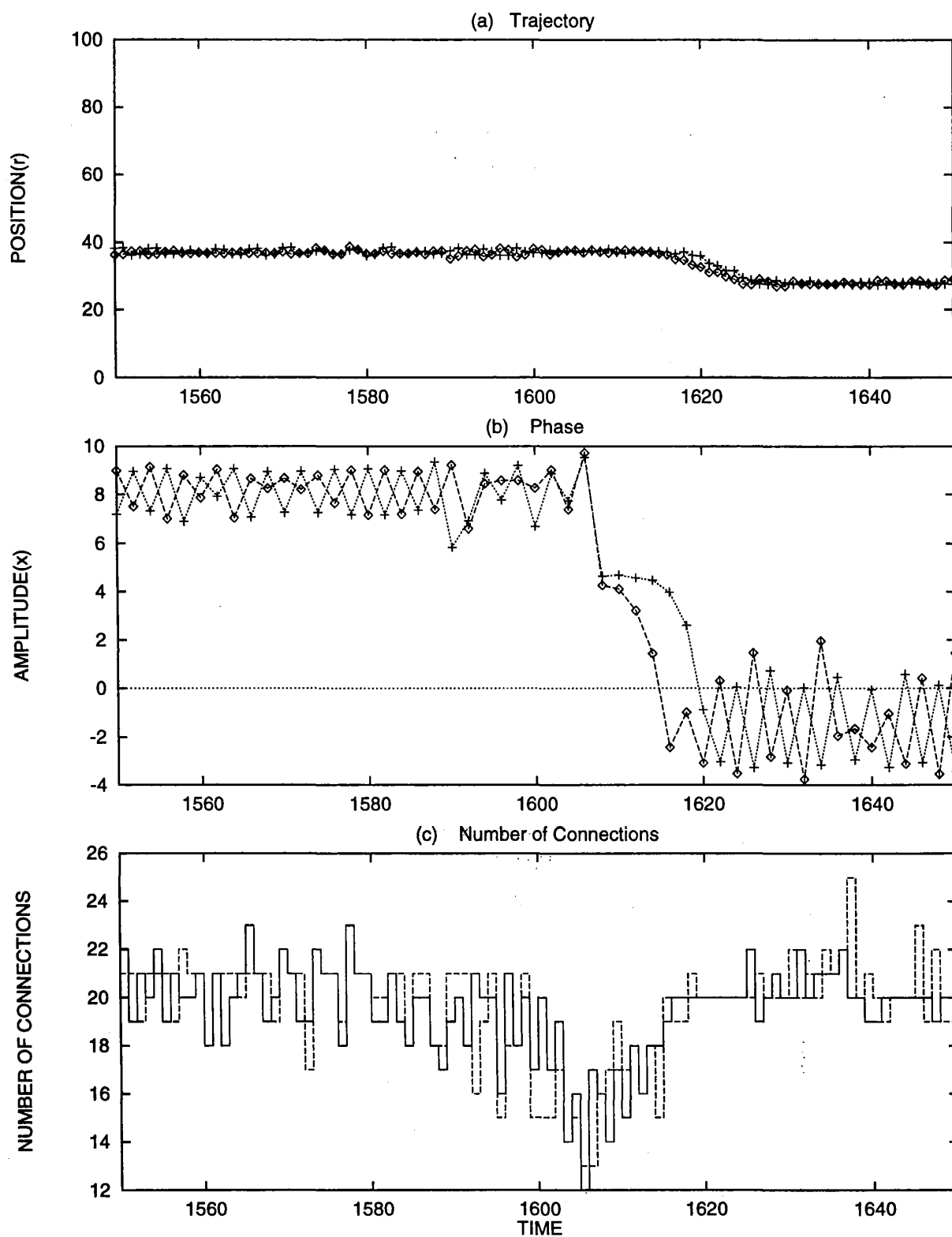


図 3.14. クラスター間で要素の移動が起こる時の様子を詳細に書いたもの。(a) は移動する要素の軌跡を描いたもの。(b) はその時の振動の様子を描いたもの。(c) は各要素が他の幾つの要素と結合しているか、その結合数の時間発展を描いたもの。



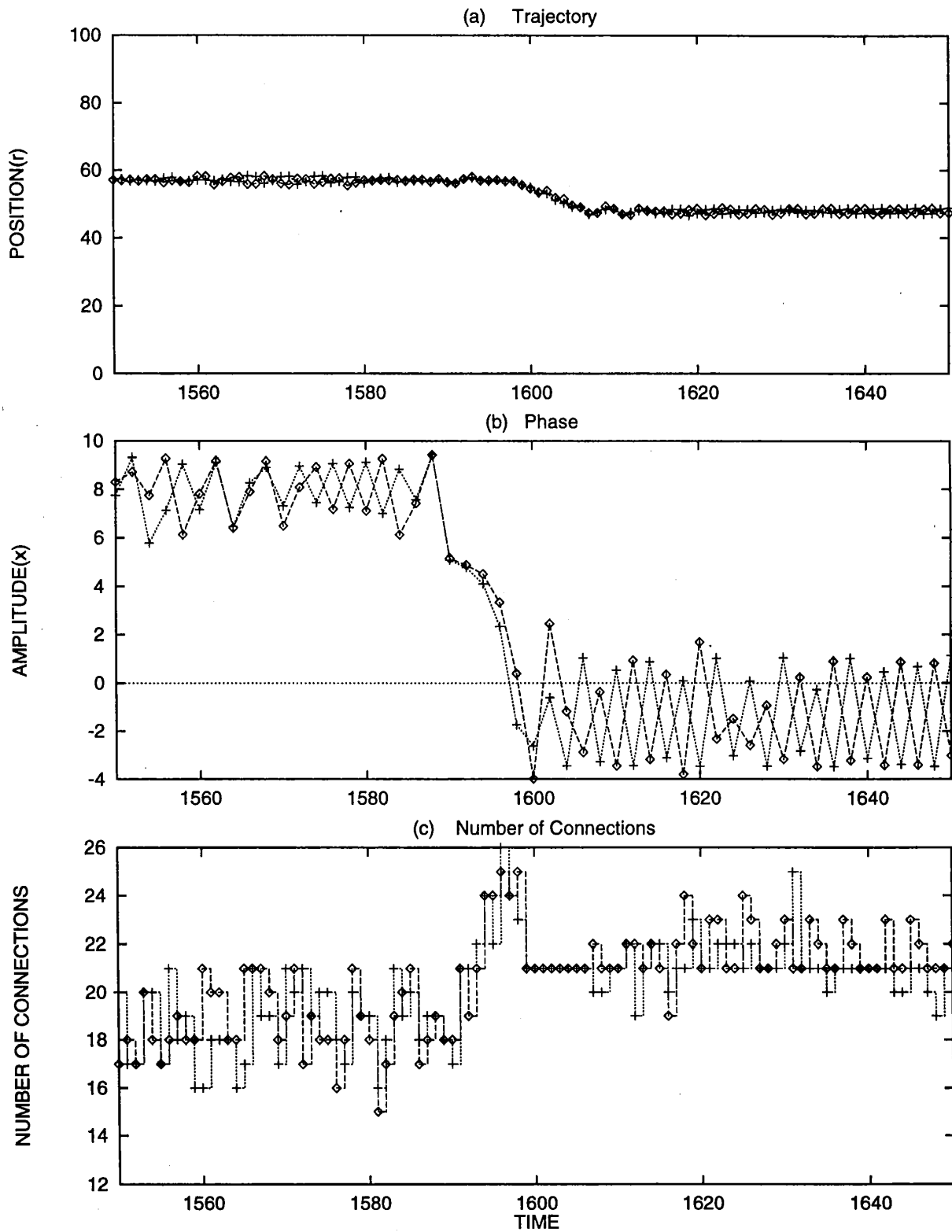


図 3.15.

要素の移動が起こる様子を図 3.14 と同様に描いたもの。(a)(b)(c) の意味は図 3.14 と同じ。実は本図と図 3.14 は一連のイベントであり、両者の時間軸は共通である。

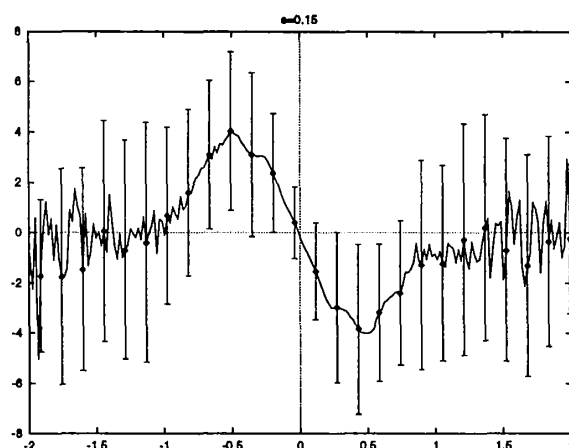


図 3.16.

図 3.10と同様に、要素が受ける力をクラスタの重心からの距離の関数として描いたもの。エラーバーはその揺らぎ(標準偏差)を表す。図は間欠相に対応する。

では、最初に挙げた疑問:“間欠的拡散の起源”は何であろうか。幾つか理由は考えられる。以下にそれを順次検討していく。

まず、間欠的な拡散の仕組みを見る。図 3.12(a) はクラスタが格子構造を形成している様子を見るために、要素を位置の小さい順から並べ、 $x_n(i) - r_n(i)$  を線で結んでプロットしたものである。2 ステップおきに描いているので、各要素の振動は 2 バンド振動であり、逆振動をしているクラスタが隣に並んでいる様子が分かる。一方、図 3.12(b) はある要素が隣のクラスタへ移動していく様子を描いたものである。拡散していく要素に注目すると、しばらくは自分が構成するクラスタの他の要素と同様の振動をしているが、やがて、クラスタには留まりながら、その振動が徐々に外れ、反転していく。その後、その要素は振動を同じくする隣のクラスタに移動していく。まとめると、振動の反転 → 移動、が拡散のメカニズムである。従って、この小節の初めに挙げた疑問は以下のように変わる。すなわち、要素の振動はなぜ安定化しないで非常に稀に反転を起こすのか? なぜ、それは完全には押えられないのか?

まず第 1 の理由として、内部振動の結合系における不安定性の存在が考えられる。GCM の部分秩序相においても同様に 2 バンド構造を持ちながら、間欠的にその振動が反転するパラメータ領域が認められる。我々の系においても要素は自らが構成するクラスタの他の要素と全結合しており、間欠的振動反転も GCM におけるそれと同様であろうか。しかし、以下の 2 点の理由から内部振動の結合系のみをその起源と考えることは出来ない。一つは、我々の系では振動の動力学は完全には大域結合系ではなく、隣のクラスタとローカルな相互作用をしているのは述べた通りである(図 3.13)。従って、完全に GCM と同様に考えるわけにはいかない。もう一つは、間欠的な要素の拡散が見られるパラメータ領域が GCM で間欠的な振動反転が見られる部分秩序相に比べて随分広いことである。また、現象も反転と反転の間隔が GCM のそれよりも極めて長い。我々は従って要素が移動するという、要素の外部動力学を考えねばならない。

従って、第 2 に考えられることとしては、要素の外部動力学に関することである。図 3.14 はあるクラ

スターから2つの要素が隣に移動して行く様子を詳しく描いたものである。図 3.14(a) はそのクラスターを構成する要素のうちやがて隣のクラスターへ移動して行く要素の軌跡を、図 3.14(b) はその時のその要素の振動の時間発展を、図 3.14(c) はそれぞれの要素が幾つの要素と結合しているか、をそれぞれ時間とともに描いたものである。まず、要素の振動の位相が反転して (図 3.14(b)), その後、軌跡が隣のクラスターへ移動して行く様子が分かる (図 3.14(a)). 図 3.14(c) で振動の反転の直前に結合数が減少しているように見える。これは、クラスターの位置の揺らぎによって結合数が減少し、それが振動の不安定化を招き、反転したことを示すのだろうか。一方図 3.15 は同様にしてある要素が隣のクラスターへ移動して行く様子を描いたものである。前と同様にまず振動の反転が起こり (図 3.15(b)), その後、要素は移動していく (図 3.15(a)). しかし、この場合結合数の変化を追うと、振動の反転の直前に前と同様な結合数の増減が起こっていると判断する事はできない。(その後の結合数の増大は要素の移動によるものであって、時間順序からも今考えている振動反転とは関係が無い)。以上では、要素の外部の動力学、特に結合構造の変化 (結合数の増減) に注目したが、そのみが振動の反転の原因とは考えられないと結論付けることができる。

以上のように、間欠的拡散の機構は単一の起源からは説明できない。

まとめて、内部動力学と外部動力学の相互干渉のなかで、クラスターは格子構造を形成した。しかし、クラスターの構造は完全には安定ではなかった。その機構はやはり、内部動力学と外部動力学の相互干渉のなかで生み出されていると考えられる。

更に考えられるのは要素はクラスターに等分配されるまで移動を続けるということである。例えば、何らかのエネルギーのようなものが考えられて、それが最少の状態が安定で、系はその状態を探している、という見方である。図 3.17 は等分配の度合を時間の関数として表したものである。等分配の度合としては、クラスターによる格子構造が形成された後、各クラスターを構成する要素の数を単に掛け合わせて、等分配の場合が 1 になるように定数を掛けた。

$$\left(\frac{1}{N/c}\right)^c \prod_{i=1}^c n_i$$

ここで  $c$  はクラスターの数で、 $n_i$  は各クラスターの要素数。等分配の度合が強いほど 1 に近付くと考えることが出来る。図 3.17 から、系は等分配の周りを揺らいでいると見ることも出来るが、等分配が実現された後も再び等分配からはずれる様子が分かる。等分配の描像が必ずしも成り立たないことを物語っている。

### 3.7 まとめと議論

本章では、内部動力学 (= 要素の振動動力学) と外部動力学 (= 要素の空間移動動力学) を合わせ持つ系を考察するためのアブストラクトなモデル、Coupled Map Gas(CMG) を提案した。

そこでは、空間上で動的なクラスター形成を見る事ができた。クラスターは生成、分裂、融合を繰り返し、その機構については内部動力学における同期が重要であった。同期の形成は GCM と関連がある。要素間の同期の傾向は空間における外部動力学によって増幅される。それが空間におけるク

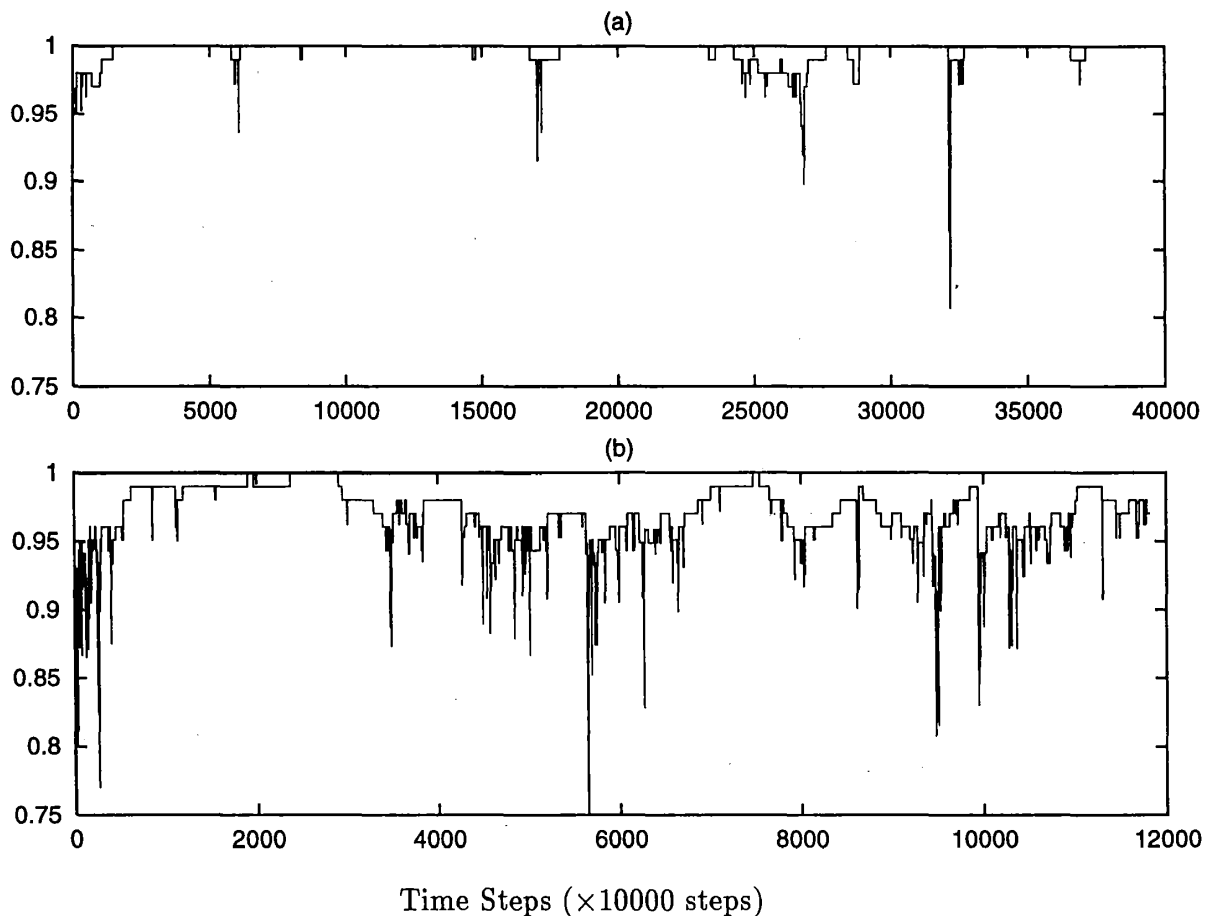


図 3.17. 等分配の度合を時間の関数として表したもの. (a)  $a = 1.8$ ,  $\epsilon = 0.15$ ,  $N = 100$ ,  $R = 10$ ,  $f = 0.1$ ,  $L = 100$   
(b) システムサイズを 2 倍にした.  $N = 200$ ,  $L = 200$

ラスタの分裂であった。さらに、その空間の移動が同期を不安定化し、それは過程の繰り返しの源になっていた。

また、クラスターが自発的に格子を形成する状態も見出された。その状態では言わば、GCM が格子を形成しているがごとくであった。その状態は、しかし、見ために反して極めて動的な状態であった。格子構造はその動的な相互作用の中で維持されている事を見た。各要素の振動は構造の形成の中で制限されていった。また、振動の制限により構造が維持されていた。

### 3.7.1 階層構造の出現

ここで、階層性の出現に注目したい。クラスターの格子構造の形成は、要素の集団が一つの単位として振る舞っている事を示している。その意味で、要素集団はより高次の構造を形成したと言える。その際、空間におけるクラスター化とは、低次から見れば、低次の階層における自由度の集積とそれによる協調性の発現であり、これが高次の階層であるといえる。また、高次の階層の出現は低次の運動の制限を伴う。これは高次からは、(役割)分化として、我々には見えるであろう。

このことは例えば生物系における形態形成やあるいは、脳におけるモジュール構造の形成、等に関

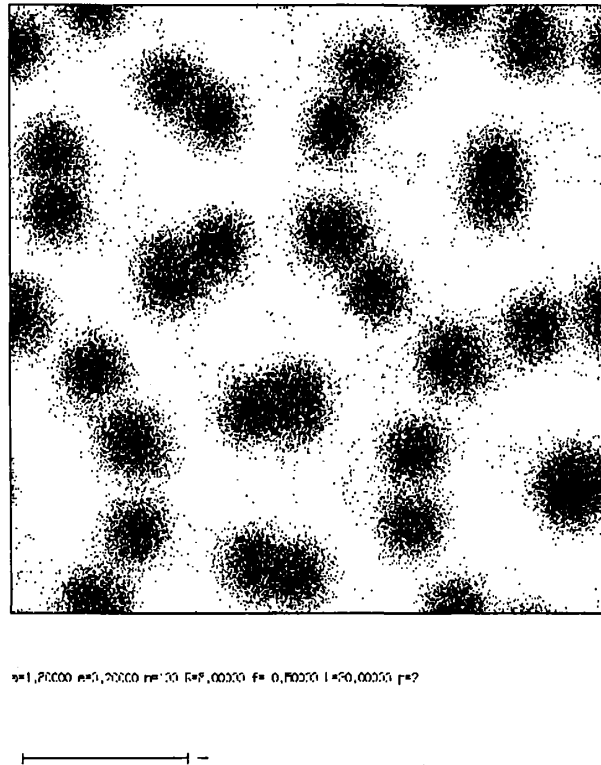


図 3.18.  $f < 0$  の場合に見られる空間構造. 色の違いは要素の振動の位相の違いである.

係が深い. ダイナミカルな視点から見れば, 発生における形態形成はそれを構成する細胞の分化によって可能になり, また, 形態形成による空間構造が細胞の分化を促している. 従って, 発生に関する物質の理解ばかりではなく, 形態やその構成要素たる細胞のダイナミカルな性質を知ることは, 非常に重要な残された問題と言えよう.

### 3.7.2 今後の課題

今後の課題として幾つか挙げたい.

- 流動相ではあるクラスターの分裂が次の分裂を導きそれが次々連鎖的に続くように見える. 分裂の連鎖の時間構造に特徴は無いだろうか.
- モデル (3.3) では, 簡単のために, 要素が相互作用をするかしないかは, 距離  $R$  できまり, その内側では一様であり, 外側とは相互作用が無かった. これは, モデルとして不自然であると思われるかもしれない. 他のケースとして, 空間の相互作用が  $\exp(-r^4)$  であるような場合を試したが, 定性的な性質は変わり無いように思われる. 従って, ある種の単距離相互作用である限りここでの結果には一般性があると考えられる. また, 相互作用が距離に対して他の関数である場合, (例えば, 指数的であるとか, 巾的である等) の場合については他に考察する必要があるだろう.
- 本章では力の定数が正の場合  $f > 0$  のみを扱って来た.  $f < 0$  の場合の予備的な数値実験では要素はクラスターを作る. その時, 図 3.18に見られる格子構造を形成する. また, 要素は格子の

上のクラスターを行き来する。この場合は振動の同期は斥力をもたらす。したがって、クラスターの維持は本章で述べた機構とは別のはずである。しかし、各クラスターは本章で述べたのと同様に、同位相で振動する要素によって構成されている。また、この格子構造は一見奇妙に見える。また、格子サイズもパラメータによって変化していくようである。ここで見られる動力学はどのようなものだろうか？

これまでポピュレーション・ダイナミクスは生物系の問題を考える際にも有効な手段として様々な研究がなされ、蓄積もされてきた。物理学で養われてきた統計的手法や分岐理論はそこでは強力な方法論として用いられる。しかし、そこでは問題とする対象のさまざまな属性は捨象され、集団の濃度として数値に置き換えられてしまっている。

これに対する批判、反省あるいは限界性の認識から、昨今、様々な試みが始まっている。その一つは要素を要素としてモデルにデザインする方法である。本章でのアプローチはここにある。

今後は各要素と要素集団による協同的現象の間の関係を、要素を捨象してしまう事無く見る視点が重要になってくると思われる。

## 4. 議論, 展望

本論ではカオス写像結合系における協同現象について考察してきた。以下では2章, 3章での結果を簡単にまとめるが詳細は各章を参照されたい。

2章では大域的にカオス要素が結合した系について調べた。モデルにおいて従来と違う点は各要素にヘテロ性があることである。ヘテロ性とはこの場合各要素の非線形性が分布をしていることを指している。

2章では特に要素の振動に一見してわかる相関がない乱流相で、系の有効な自由度がシステムサイズと同程度の高自由度カオスの状態をくわしく調べた。

様々な解析により、平均場が準周期運動をしている事を示した。また、これまで低自由度系でカオスへ至るルートとして広く知られているいくつかの分岐と同様の分岐を平均場は示していた。このことは、平均場に低自由度のカオスが存在する可能性があることを示唆していると思われる。一方で、明確に平均場の運動が低自由度のカオスとして“観測”出来る例はなかった。このことが意味する所は、今後検討されなければならないだろう。

リャプノフスペクトルによる解析は、トーラスの存在を示す0が存在しないことを示した。このことは平均場の準周期運動とどのように両立するのか。

更に、簡単な場合についてトーラス運動の機構を示した。その時、各要素にとっての分岐に注目しながらその分岐構造の組織化として、個々の要素のダイナミクスと平均場の関係を考察した。非線形

性が分布していることが重要な役割を果たしていた。

ここで、ミクロなレベルでの個々の要素の動力学とマクロなレベルでの平均場の動力学の関係を再考してみたい。

そもそも Logistic Map はカオスを示す多くの系を見た時に抽象的に捉えられる現象論的な力学モデルであると考えることが出来る。例えば、Lorentz 方程式の時系列のある一断面は、Logistic Map と本質的に等価な性質を持っている。また、実験で得られた観測量のプロットの多くも本質的に Logistic Map と同等である。そこで、我々は Logistic Map をカオティックな挙動を示す多くの実験的・理論的系を理解するための装置として採用してきた。Logistic Map の理解を元々の系の理解としたのである。

ところで、物理学においては事象を現象面のみではなく、それを微視的過程と結び付けてその理解とする志向を持つ。実験結果を検討する際、実験データからダイナミクスを再構成しモデル方程式を構築し、解析するが、実験は巨視的方法によって系の巨視的な性質を捉えているといえるから、そのとき構築された現象論的な巨視的モデルは、微視的な視点からは多数の系の統計集団の性質を見ていると考えることが出来る。すなわち、現象面において表された一つの力学系は、微視的な立場から見れば統計集団を考えて、その統計平均としての性質を捉えていることになる。

我々の結合写像系では、個々のローカル・ダイナミクスは、平均場のダイナミクスから見れば一つの微視的過程になる。その際、我々が平均場の動力学として捉えているのは、上の議論と同様に多くの微視的な統計集団を背景に持つそれらの標本平均としての平均場の動力学に他ならない。

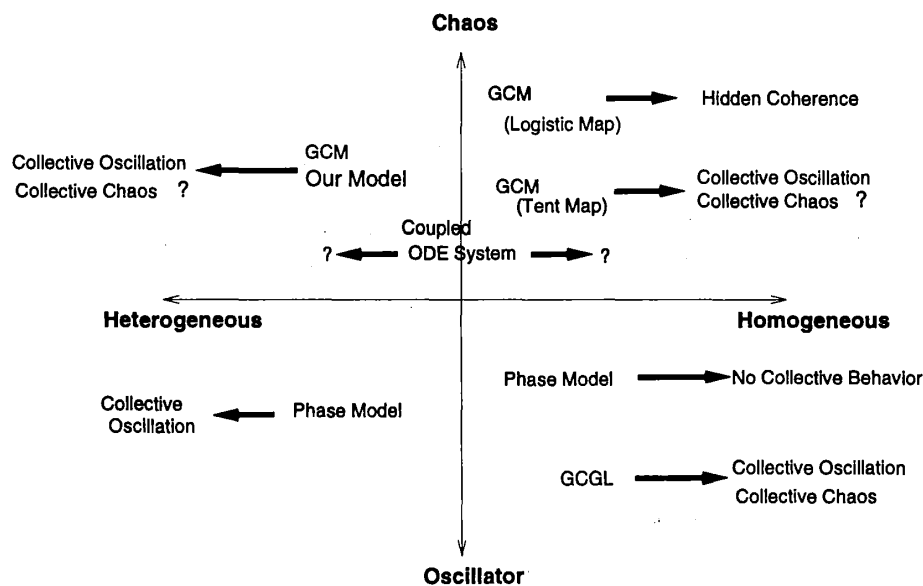
そして、平均場の性質を知る方法としては実験の場合と同様に2つの方法が考えられる。一つは現象論的な平均場のモデルを構築することである。もう一つは微視的過程の統計集団を考察することである。

リャプノフ数に着目したとき、前者の立場に立てば、平均場のリャプノフ数は0となるだろう。一方後者の立場に立つ時、平均場のリャプノフ数とは何を意味するのであろうか。我々はアンサンブルのリャプノフ数なるものを考えなければならないのか。これはひるがえって実験データから推定する系のリャプノフ数に対して反省を加えることになる。リャプノフ数を系の不安定性を測る指標、という程度にラフに考えたとしても、微視的な視点からはどのように基礎付けることが出来るのだろうか。

今後、様々な(大域)結合系において集団運動の問題が明らかにされていくであろう(図4.1)。

3章では、空間に位置を持つカオス振動要素が空間を動きながら相互に作用を及ぼし合う相手を変えていくシステムを扱った。内部動力学と外部動力学とは要素が内部動力学を持つ、そこに移動の外部動力学が加わった。それらは他の要素との相互作用で決まり、内部動力学と外部動力学の相互干渉という視点から調べた。

系では空間にクラスターが形成されてそれが時間・空間的に生成消滅する現象が見られた。そこでは、要素→クラスターという階層的な構造の形成を見た。また、クラスターにとって要素の運動は内部動力学と見ることも出来る。これもひとつの階層表現であろう。クラスターは生成・消滅する



Collective Motion in Globally Coupled Systems

図 4.1. 大域結合系における集団運動. これまで調べられてきた振動的な要素の大域結合系における集団運動を見取図的にまとめたものである. 振動的な要素としては振動子とカオス素子が選ばれてきた (縦軸). またそれぞれの要素の性質は, 一様な場合と非一様な場合がある (横軸). 矢印の先がそれぞれの系で見出されている集団運動である. “GCM”=Globally Coupled Map. “GCGL”=Globally Coupled Ginzburg-Landau equation. “?” は明確に確認されていないものもしくは今後の課題であるものを指す.

なのでこの階層構造も恒常的ではない. それらの構造は内部動力学と外部動力学の相互干渉の中で生成され, 維持されていることを合わせてみた.

我々の系を要素が多数結合している系の一つとして, 他の結合系と併記すると以下が挙げられる.

- 局所相互作用系
- 大域結合系
- 非局所非大域結合系
- 要素間結合の強さの変化するネットワーク系
- 要素間結合のつなぎ変えを含む系

上の 2 つについては多くの研究が残され, 研究の蓄積も多い. 残る 3 つについては, 今後考察の余地が残る.

## 謝辞

指導教官である金子邦彦さんには 2 年の間, 未熟な私を研究へと導いて頂き深く感謝いたします. 彼の研究を通じ物理学にも豊かな表現の世界があることを知りました. 今後も私の研究に多大な影響を与えてと思います.

橋本敬さんと山本知幸さんには本論文を批判的に読んで頂き感謝いたします. 論文の完成に際し大



変役立ちました。

金子研究室をはじめ、駒場で研究生活を共にする皆さんに感謝いたします。

## 参考文献

- [1] P. Glansdorff and I. Prigogine. *Thermodynamics of Structure, Stability, and Fluctuations*. Jon Wiley & Sons, 1971.
- [2] G. Nicolis and I. Prigogine. *Self-Organization in Nonequilibrium Systems*. Jon Wiley & Sons, 1977.
- [3] H. Haken. *Synergetics 2nd Edition*. Springer, 1978.
- [4] 佐々木力. 科学革命の歴史構造. 講談社学術文庫, 1995.
- [5] 河本英夫. オートポイエシス 第三世代システム. 青土社, 1995.
- [6] 森 肇・蔵本 由紀. 散逸構造とカオス. 岩波書店, 1994.
- [7] J. P. Crutchfield and K. Young. Computation at the onset of chaos. In Wojciech H. Zurek, editor, *Complexity, Entropy and the Physics of Information*, Redwood City, 1990. Addison-Wesley.
- [8] J. P. Crutchfield. The calculi of emergence: computation, dynamics and induction. *Physica*, 75D:11–54, 1994.
- [9] K. Matsumoto and I. Tsuda. Extended information in one-dimensional maps. *Physica D*, 26:347–357, 1987.
- [10] K. Kaneko. *Collapse of Tori and genesis of chaos in dissipative systems*. World Scientific, 1986.
- [11] K. Kaneko. Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements. *Physica D*, 41:137–172, 1990.
- [12] N. Nakagawa and Y. Kuramoto. Collective chaos in a population of globally coupled oscillators. *Prog. Theor. Phys.*, 89:313–323, 1993.
- [13] N. Nakagawa and Y. Kuramoto. From collective oscillations to collective chaos in a globally coupled oscillator system. *Physica D*, 75:74–80, 1994.
- [14] K. Kaneko. Mean field fluctuation of a network of chaotic elements. *Physica D*, 55:368–384, 1992.
- [15] G. Perez and H. A. Cerdeira. Instabilities and nonstatistical behavior in globally coupled systems. *Phys. Rev. A*, 46:7492–7497, 1992.
- [16] G. Perez, C. Pando-Lamrhythini, S. Shinha and H. A. Cerdeira. Nonstatistical behavior of coupled optical systems. *Phys. Rev. A*, 45:5469–5473, 1992.
- [17] S. Shinha, D. Biswas, M. Azam and S. V. Lawande. Nonstatistical behavior of higher-dimensional coupled systems. *Phys. Rev. A*, 46:3193–3197, 1992.
- [18] W. Just. Globally coupled maps: phase transitions and synchronization. *Physica D*,

81:317–340, 1995.

- [19] W. Just. Bifurcations in globally coupled maps lattices. *Journal of Statistical Physics*, 79:429–449, 1995.
- [20] R. E. Mirollo S. H. Strogatz and P. C. Matthews. Coupled nonlinear oscillators below the synchronization threshold: Relaxation be generalized landau damping. *Physical Review Letters*, 68:2730–2733, 1992.
- [21] K. Kaneko. Simulating physics with coupled map lattice. In *Formation, Dynamics and Statistics of Patterns*. World Scientific, 1990.
- [22] Y. Hayakawa, T. Mizuguchi, M. Sano, N. Shimoyama, and K. Sugawara. Collective motions of motive elements. *preprint*, 1995.
- [23] N. Shimoyama, K. Sugawara, T. Mizuguchi, Y. Hayakawa, and M. Sano. Collective motions in a system of motive elements. *preprint*, 1995.
- [24] O. Miramontes, R. V. Sole, and B. C. Goodwin. Collective behavior of random-activated mobile cellular automata. *Physica D*, 63:145–160, 1993.